СБОРНИК
ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Кинематика

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ (СИБСТРИН)

СБОРНИК ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Кинематика

Под редакцией В.А. Юдина и В.В. Леманова

Учебно-методическое пособие

НОВОСИБИРСК 2007

УДК 531
ББК 22.213
С232

Сборник индивидуальных заданий по теоретической механике. Кинематика : учебно-методическое пособие / А. А. Белкин, И. Т. Вохмянин, В. В. Егоров, С. Л. Краснолуцкий, В. В. Леманов, В. А. Юдин ; под ред. В. А. Юдина и В. В. Леманова ; Новосиб. гос. архитектур.-строит. ун-т (Сибстрин). – Новосибирск : НГАСУ (Сибстрин), 2007. – 68 с.

ISBN 5-7795-0344-3

Сборник включает четыре задания по кинематике, предусмотренные стандартным курсом теоретической механики технического университета. Каждое задание содержит 30 вариантов. Задания предваряются кратким изложением основ кинематики. Для каждого из них приведен пример выполнения.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов всех специальностей дневной и вечерней форм обучения.

Печатается по решению издательско-библиотечного совета
НГАСУ (Сибстрин)

Рецензенты:

- С.А. Гапонов, д-р физ.-мат. наук, профессор (ИТПМ СО РАН);
- И.М. Бондарь, канд. физ.-мат. наук, доцент (НГАСУ (Сибстрин))

ISBN 5-7795-0344-3

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие

Данное пособие посвящено решению задач кинематики и является третьей частью изданных ранее сборников индивидуальных заданий по статике (2004 г.) и по динамике (2005 г.). Оно содержит четыре индивидуальных задания по основным темам кинематики.

Первое задание – по кинематике точки, и состоит оно из двух частей. *В первой части* требуется по заданным уравнениям движения точки найти основные ее кинематические характеристики – траекторию, скорость и ускорение. *Во второй части,* наоборот, требуется восстановить уравнение движения и скорость точки по заданному ускорению и начальным условиям. Выполнение этого задания требует умения как дифференцировать, так и интегрировать заданные функции. *Во втором задании* необходимо восстановить движение механизма по заданному движению одного из его звеньев. При этом каждое звено совершает либо поступательное, либо вращательное движение. *Третье задание* посвящено сложному движению точки. В нем требуется определить абсолютные скорость и ускорение точки по заданному ее движению относительно некоторого подвижного тела, движение которого также задается и может быть поступательным либо вращательным, в зависимости от варианта задания. И, наконец, *четвертое задание,* как и второе, требует проведения кинематического расчета многозвенного механизма. Только в этом случае каждое его звено может совершать простейшее либо плоское движение. Причем передача движения от одного звена к другому может быть сложной, поэтому решение четвертого задания требует знания сложного движения точки.

Чтобы облегчить процесс выполнения заданий, они предваряются кратким изложением основ кинематики. Кроме того, для каждого из заданий разобран пример его выполнения. Поэтому прежде чем выполнять задание, следует ознакомиться с соответствующим теоретическим материалом и разобрать пример решения задания.

1. Кинематика точки

1.1. Пространство и время. Системы отсчета. Задачи кинематики. Раздел механики, в котором изучаются геометрические свойства движения тел без учета действующих на них сил, называется кинематикой. Кинематика решает *две основные задачи*:

1. *Определение математических способов задания движения тел.*
2. *Определение для заданного движения тела его кинематических характеристик: траектории, скорости, ускорения* и т.п.

Существует и третья задача кинематики, которую обычно не формулируют в курсах теоретической механики, – *это обратная задача кинематики: восстановление законов движения точки (тела) по его кинематическим характеристикам – скорости и ускорению*.

Положение тела становится определенным лишь в случае, если задано некоторое другое тело – *тело отсчета*, по отношению к которому это положение и фиксируется. С телом отсчета связывают *систему отсчета*. Задать движение тела – это значит задать его положение относительно данной системы отсчета в любой момент времени. Относительно разных тел отсчета движение тоже будет различным.

Поскольку движение происходит в пространстве и во времени, фундаментальное значение приобретает вопрос об их определении и задании. В классической механике постулируется существование не связанных между собой абсолютного пространства и абсолютного времени. Пространство считается трехмерным евклидовым, описываемым соответствующей геометрией. Время предполагается однородным и одинаковым во всех точках пространства. Однородность времени означает отсутствие выделенных моментов времени. В этом смысле безразлично, какой момент времени выбрать в качестве начального. Выбор начала отсчета времени диктуется, следовательно, лишь конкретной решаемой задачей.

За единицу длины берется один метр, а за единицу времени берется одна секунда (1 *с* = 1/86400 *суток*).

1.2. Способы задания движения точки. Изучение способов описания движения мы начнем с движения материальной точки. Выберем систему отсчета с началом в точке O и свяжем с ней некоторую систему координат. На практике широко используется трехмерная прямоугольная декартова система координат $Oxyz$, показанная на рис. 1.1. При движении точки M ее положение относительно начала координат с течением времени будет меняться. Геометрическое место последовательно занимаемых ею точек называется *траекторией.* Если бы точка была покрашена, то траектория в точности совпала бы с ее следом.

Положение точки в некоторый момент времени t определяется ее радиус-вектором $\mathbf{r}$. С течением времени вектор $\mathbf{r}$ будет меняться. Задав закон его изменения со временем

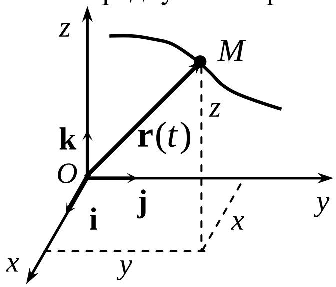


Рис. 1.1

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \qquad (1.1)$$

мы тем самым зададим *закон движения точки*. Такой *способ задания движения* называется *векторным*, а соотношение (1.1) определяет закон движения точки в векторной форме.

Положение точки M по отношению к заданной системе отсчета $Oxyz$ наряду с заданием радиус-вектора можно определить ее декартовыми координатами x, y, z (см. рис. 1.1). При движении координаты точки меняются, и их задание как функций времени

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t) \qquad (1.2)$$

также позволяет однозначно определить положение точки M в любой момент времени t. Описанный способ задания движения материальной точки называется *координатным*, а уравнения (1.2) называют законом движения точки в координатной форме.

Связь между координатным (1.2) и векторным (1.1) способами задания движения точки определяется соотношением

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}\, x(t) + \mathbf{j}\, y(t) + \mathbf{k}\, z(t), \qquad (1.3)$$

где **i**, **j**, **k** – единичные векторы осей x, y, z.

Если траектория движущейся точки известна заранее, то можно определить положение точки M, “не выходя” за рамки траектории. Пусть точка M движется вдоль некоторой траектории AB (рис. 1.2). Выберем на ней какую-нибудь точку O, которую примем за начало отсчета. Рассматривая теперь траекторию как криволинейную координатную ось, установим на ней положительное и отрицательное направления и введем криволинейную координату s – длину дуги $\overset{\frown}{OM}$, взятую с соответствующим знаком. При движении точки координата s будет меняться, и зависимость

$$s = s(t) \tag{1.4}$$

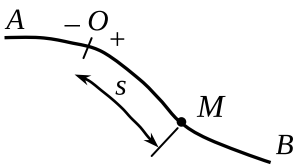


Рис. 1.2

однозначно определит положение точки M в любой момент времени t. Способ задания движения с помощью уравнения (1.4) называют *естественным*, а само уравнение (1.4) – *законом движения точки вдоль траектории.* Связь естественного способа задания движения точки с координатным дается соотношением

$$s(t) = s(0) \pm \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt\,. \tag{1.5}$$

Знак “+” или “–” в формуле (1.5) берется в зависимости от направления движения точки по траектории от “–” к “+” или от “+” к “–” соответственно.

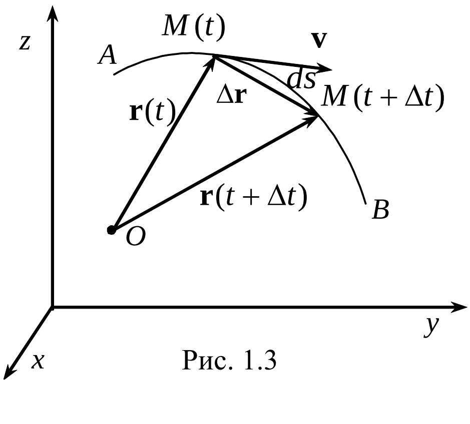


Рис. 1.3

1.3. Скорость точки.

Рассмотрим движение материальной точки вдоль траектории AB (рис. 1.3). Ее перемещение за малый промежуток времени Δt равно $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)$. Тогда величина

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} \tag{1.6}$$

будет характеризовать быстроту изменения положения точки относительно данной системы координат в момент времени t, называемую *скоростью точки*. Таким образом, *скорость материальной точки – это векторная кинематическая характеристика точки, определяющая быстроту изменения ее положения относительно данной системы координат и равная производной от радиус-вектора точки по времени.* Так как предельное направление вектора $\Delta\mathbf{r}$ совпадает с касательной к траектории, то *вектор скорости точки направлен по касательной к траектории в сторону ее движения.* Размерность скорости равна отношению длины ко времени, а измеряется она в *м/с*.

Продифференцировав (1.3) по времени, получим

$$\mathrm{v}_x = \dot{x}, \quad \mathrm{v}_y = \dot{y}, \quad \mathrm{v}_z = \dot{z}. \tag{1.7}$$

Формулы (1.7) определяют скорость точки при координатном задании ее движения. Модуль скорости определяется при этом равенством

$$\mathrm{v} = \sqrt{\mathrm{v}_x^2 + \mathrm{v}_y^2 + \mathrm{v}_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\ , \tag{1.8}$$

а направляющие косинусы – выражениями

$$\cos(\mathbf{v}, \mathbf{i}) = \frac{\mathrm{v}_x}{\mathrm{v}}, \quad \cos(\mathbf{v}, \mathbf{j}) = \frac{\mathrm{v}_y}{\mathrm{v}}, \quad \cos(\mathbf{v}, \mathbf{k}) = \frac{\mathrm{v}_z}{\mathrm{v}}. \tag{1.9}$$

При естественном задании движения точки

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt}\boldsymbol{\tau} = \dot{s}\ \boldsymbol{\tau} = \mathrm{v}_\tau\,\boldsymbol{\tau}, \tag{1.10}$$

где мы ввели единичный вектор

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}, \tag{1.11}$$

направленный вдоль касательной к траектории в положительном направлении криволинейной оси. *Таким образом, вектор скорости точки при естественном способе задания ее движения направлен по касательной к траектории и равен модулю производной* $|ds/dt|$. Величину v_τ называют *касательной скоростью.* Она равна проекции вектора скорости на направление единичного вектора $\boldsymbol{\tau}$. С точностью до знака касательная скорость совпадает с модулем скорости и равна ему, если точка движется в положительном направлении криволинейной оси.

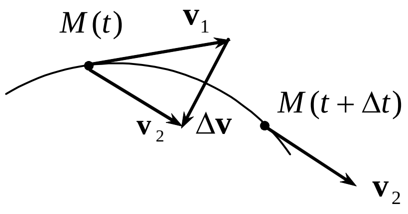


Рис. 1.4

1.4. Ускорение точки. Вектор $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ (рис. 1.4) представляет собой приращение вектора скорости за время Δt. Быстроту его изменения со временем будет характеризовать величина

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}, \tag{1.12}$$

называемая *ускорением точки.* Таким образом, *ускорение точки – это векторная кинематическая величина, характеризующая быстроту изменения ее скорости и равная первой производной от скорости или второй производной от радиус-вектора по времени.*

При уменьшении Δt точка $M(t+\Delta t)$ стремится к точке $M(t)$, а плоскость $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ будет менять свое положение. В пределе, при $\Delta t \to 0$, эта плоскость переходит в так называемую *соприкасающуюся плоскость* траектории в точке $M(t)$. Соприкасающаяся плоскость обладает тем свойством, что она ближе всех других плоскостей приближается к траектории в рассматриваемой точке. В частности, если точка движется в плоскости, то соприкасающаяся плоскость с ней и совпадает.

Вектор ускорения $\mathbf{a}$ лежит, следовательно, в соприкасающейся плоскости и представляется в виде суммы двух слагаемых

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_\tau + \mathbf{a}_n, \tag{1.13}$$

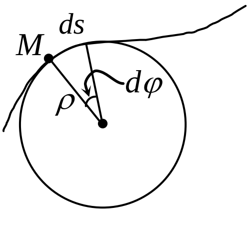


Рис. 1.5

где $\mathbf{a}_\tau = \ddot{s}\,\boldsymbol{\tau}$ – *касательное или тангенциальное ускорение,* направлено по касательной к траектории, а ускорение $\mathbf{a}_n = (\dot{s}^2/\rho)\mathbf{n} = (\mathrm{v}^2/\rho)\mathbf{n}$ называют *нормальным,* оно направлено по нормали к траектории в сторону ее вогнутости. Радиус кривизны траектории ρ равен радиусу окружности, которая максимально близко приближается к траектории в точке M (рис. 1.5).

Касательное ускорение характеризует изменение вектора скорости по величине. Если скорость точки по модулю остается постоянной, $\mathrm{v} = const$, то $a_\tau = 0$. Нормальное ускорение характеризует изменение скорости по направлению. Если точка движется по прямой, то $\rho = \infty$ и $\mathbf{a}_n = 0$.

Поскольку тангенциальное $\mathbf{a}_\tau$ и нормальное $\mathbf{a}_n$ ускорения ортогональны друг другу, то модуль полного ускорения (1.13) равен

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}\,. \tag{1.14}$$

Дифференцируя (1.3) дважды по времени, получим выражения для проекций ускорения в прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$

$$a_x = \dot{\mathrm{v}}_x = \ddot{x}, \quad a_y = \dot{\mathrm{v}}_y = \ddot{y}, \quad a_z = \dot{\mathrm{v}}_z = \ddot{z}\,. \tag{1.15}$$

Связь между проекциями ускорения в прямоугольной декартовой и естественной системах координат получим, умножая равенство (1.13) скалярно или векторно на скорость $\mathbf{v}$ точки

$$\left|a_\tau\right| = \frac{\left|a_x \mathrm{v}_x + a_y \mathrm{v}_y + a_z \mathrm{v}_z\right|}{\mathrm{v}}, \quad a_n = \frac{\left|\mathbf{a} \times \mathbf{v}\right|}{\mathrm{v}}\,. \tag{1.16}$$

В частности, для плоского движения точки (в плоскости Oxy)

$$a_n = \frac{\left|a_x \mathrm{v}_y - a_y \mathrm{v}_x\right|}{\mathrm{v}}\,. \tag{1.17}$$

2. Простейшие движения твердого тела

2.1. Поступательное движение твердого тела. *Поступательным называется такое движение тела, при котором прямая, соединяющая две любые точки тела, остается в процессе движения параллельной самой себе. Очевидно, любое прямолинейное движение твердого тела является поступательным*. Однако есть еще примеры поступательных движений, когда траектории отдельных его точек вовсе не являются прямыми линиями. На рис. 2.1 спарник AB при вращении кривошипов CA и DB также движется поступательно, он остается параллельным самому себе. Точки спарника AB движутся при этом по окружностям. Свойства поступательного движения полностью характеризуются следующей теоремой.

Теорема. *При поступательном движении абсолютно твердого тела все его точки описывают конгруэнтные траектории и имеют в каждый момент времени одинаковые скорости и ускорения.*

Согласно этой теореме поступательное движение твердого тела полностью определяется движением одной (любой) его точки. При поступательном движении можно говорить о *скорости и ускорении поступательного движения тела.* Векторы **v** и **a** можно изображать при этом приложенными к любой точке тела.

Верным является и обратное утверждение.

Теорема. *Если векторы скорости и ускорения всех точек тела в любой момент времени одинаковы, то такое движение поступательное.*

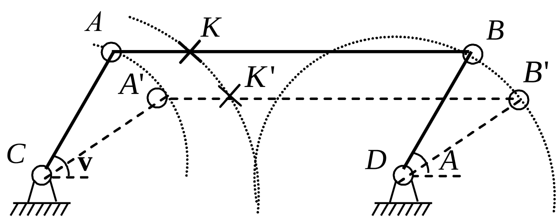


Рис. 2.1

Из этой теоремы, в частности, следует, что поступательное движение – единственный пример движения твердого тела, при котором все точки движутся одинаково.

2.2. Вращение твердого тела относительно неподвижной оси. *Движение твердого тела с двумя неподвижными точками называется вращательным движением этого тела вокруг неподвижной оси. Осью вращения* при этом является прямая, проходящая через неподвижные точки (на рис. 2.2 это ось z, проходящая через неподвижные точки A и O). Положение твердого тела полностью определится углом поворота φ этого тела вокруг оси. Уравнение

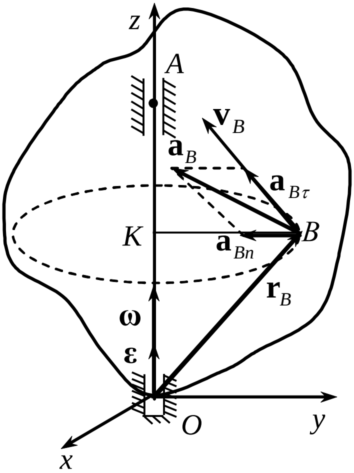


Рис. 2.2

$$\varphi = \varphi(t) \qquad (2.1)$$

называют *законом вращательного движения тела*. Будем считать угол положительным, $\varphi > 0$, если вращение происходит против часовой стрелки (для наблюдателя, смотрящего с положительной стороны оси z).

2.2.1. Угловая скорость и угловое ускорение. Величину $\omega = \dot{\varphi}$, характеризующую быстроту вращения тела, называют *угловой скоростью* тела. Угловая скорость измеряется в радианах в секунду или числом оборотов n в минуту, причем $\omega = 2\pi n/60 = \pi n/30$.

Если угловая скорость изменяется со временем, то быстроту ее изменения будет характеризовать *угловое ускорение* тела $\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$. Размерность углового ускорения $[\varepsilon] = 1/c^2$.

Введем еще векторы угловой скорости $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k}$ и углового ускорения $\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon\mathbf{k}$, где $\mathbf{k}$ – единичный вектор оси вращения Oz. Вектор $\boldsymbol{\omega}$ направлен вдоль оси вращения в сторону, откуда это вращение видно происходящим против часовой стрелки. Вектор $\boldsymbol{\varepsilon}$ также направлен вдоль оси вращения, причем для ускоренного вращения векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ направлены в одну сторону (рис. 2.3*а*), а для замедленного вращения – в разные стороны (см. рис. 2.3*б*).

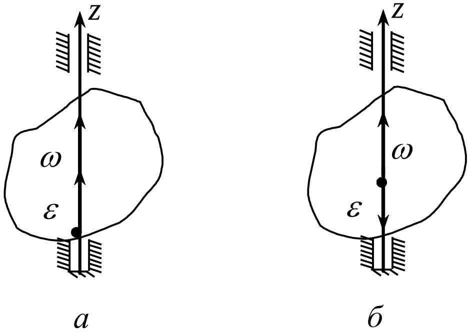


Рис. 2.3

Если $\omega = const$, то вращение называют *равномерным.* Если $\varepsilon = const$, то вращение называют *равнопеременным.* При равнопеременном вращении

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t,$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \varepsilon t^2 / 2,$$

где ω_0 – начальная угловая скорость, а φ_0 – начальный угол поворота.

2.2.2. Скорости и ускорения точек твердого тела. Все точки B тела, не лежащие на оси, будут двигаться по окружностям, плоскости которых перпендикулярны оси, центры лежат на ней, а радиусы равны расстояниям $R_B = KB$ точек до оси вращения (см. рис. 2.2).

Скорость $\mathbf{v}_B$ точки B будет тогда направлена по касательной к этой окружности в сторону вращения тела и равна по модулю $\mathrm{v}_B = |\omega| R_B$.

Ускорение $\mathbf{a}_B$ точки B будет складываться из касательного $\mathbf{a}_{B\tau}$ и нормального $\mathbf{a}_{Bn}$ ускорений, $\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_{B\tau} + \mathbf{a}_{Bn}$. Касательное ускорение в случае вращательного движения тела называют еще *вращательным* $\mathbf{a}_B^{вр} = \mathbf{a}_{B\tau}$. Направлено оно по касательной к окружности в сторону дуговой стрелки углового ускорения и равно по модулю $\mathrm{a}_\mathrm{B}^{\mathrm{вр}} = |\varepsilon| R_B$. Нормальное ускорение $\mathbf{a}_{Bn}$ направлено к центру окружности (к оси вращения), поэтому его еще называют *центростремительным* $\mathbf{a}_B^{цс} = \mathbf{a}_{Bn}$. Его модуль равен $\mathrm{a}_\mathrm{B}^{\mathrm{цс}} = \omega^2 R_B$. Модуль полного ускорения равен $\mathrm{a}_B = \sqrt{\mathrm{a}_{B\tau}^2 + \mathrm{a}_{Bn}^2} = R_B \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$. Угол же μ, между векторами полного и центростремительного ускорений, определяется из соотношения $tg\,\mu = \dfrac{a_{B\tau}}{a_{Bn}} = \dfrac{\varepsilon}{\omega^2}$. Приведенные выше формулы можно написать и в векторном виде

$$\mathbf{v}_B = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_B,\ \mathbf{a}_B^{вр} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}_B,\ \mathbf{a}_B^{цс} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_B = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_B), \qquad (2.2)$$

где $\mathbf{r}_B$ – радиус-вектор точки B тела (см. рис. 2.2).

2.2.3. Передаточные механизмы. Передача движения от одного тела (ведущего) к другому (ведомому) является одной из типичных и важнейших задач техники. Такая передача осуществляется с помощью передаточных механизмов – зубчатой передачи, фрикционной передачи и т.п. Общим для всех передаточных механизмов является то, что проскальзывание между соприкасающимися телами отсутствует. Это приводит к тому, что скорости соприкасающихся тел в точках контакта оказываются одинаковыми. Поэтому, зная движение ведущего тела, можно определить движение ведомых тел.

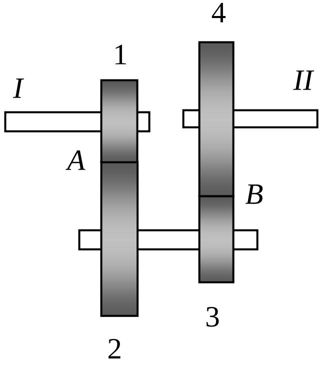


Рис. 2.4

Рассмотрим в качестве примера редуктор скорости вала. Пусть вал I вращается (рис. 2.4) с угловой скоростью ω_I. Определим угловую скорость вращения вала II, если радиусы колес (шестерней) механизма равны $r_1,\ r_2,\ r_3,\ r_4$.

Так как колесо I жестко скреплено с валом 1, то $\omega_I = \omega_1$. Аналогично $\omega_4 = \omega_{II}$. Приравнивая скорости в точках A и B контакта колес, получим $\mathrm{v}_A = \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$, $\mathrm{v}_B = \omega_3 r_3 = \omega_4 r_4$. Учитывая, что колеса 2 и 3 жестко скреплены, получаем $\omega_2 = \omega_3$. Следовательно,

$$\omega_4 = \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4}\omega_1,\ \text{или}\ \omega_{II} = \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4}\omega_I .$$

Подбирая радиусы колес, можно, таким образом, по заданной угловой скорости ω_I вала I получить любую наперед заданную скорость ω_{II} вала II.

3. Плоское движение твердого тела

3.1. Уравнения плоского движения тела. *Движение твердого тела называется плоским (плоскопараллельным), если все точки тела движутся в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости* P (рис. 3.1). Все точки тела, лежащие на прямой, перпендикулярной плоскости P (точки A и M на рис. 3.1), движутся одинаково. Поэтому движение твердого тела полностью определяется движением сечения S этого тела плоскостью P.

Для описания движения сечения S относительно системы координат Oxy, жестко связанной с плоскостью P, введем вспомогательную систему координат с началом в некоторой точке A (*полюсе*) тела и осями Ax_1, Ay_1, параллельными соответствующим осям неподвижной системы координат Oxy (рис. 3.2). Система координат Ax_1y_1 будет тогда двигаться поступательно (со скоростью точки A) относительно системы Oxy. Движение же сечения S относительно системы координат Ax_1y_1 – это вращательное движение. Таким образом, *плоское движение твердого тела слагается из поступательного движения вместе с полюсом* A *и вращательного вокруг этого полюса.* Оно будет однозначно определено заданием координат точки A и углом φ поворота какого-нибудь отрезка AB, жестко связанного с сечением S.

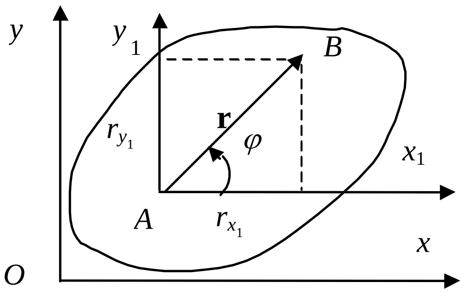


Рис. 3.2

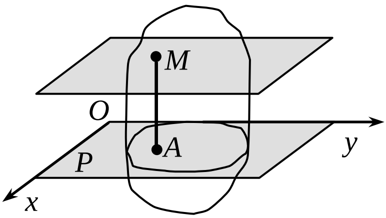


Рис. 3.1

$$x_A = x_A(t), \quad y_A = y_A(t), \quad \varphi = \varphi(t). \tag{3.1}$$

Уравнения (3.1) задают *закон плоского движения твердого тела.*

При этом за полюс может быть взята любая точка тела. Поэтому вид первых двух уравнений (3.1) зависит от выбора полюса, вращательная же часть движения (третье уравнение) от выбора полюса не зависит.

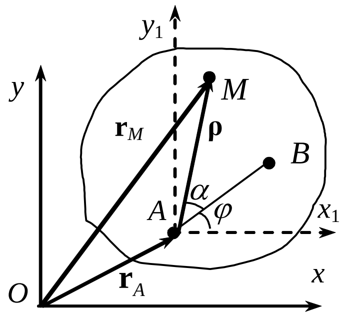


Рис. 3.3

3.2. Закон движения и траектории отдельных точек тела. Пусть точка M расположена на расстоянии $\rho = AM$ от полюса A и $\angle MAB = \alpha$ (рис. 3.3). Тогда

$$\mathbf{r}_M(t) = \mathbf{r}_A(t) + \boldsymbol{\rho}(t). \tag{3.2}$$

Проецируя это векторное равенство на оси Ox и Oy, получим закон движения точки M в координатной форме

$$\begin{aligned} x(t) &= x_A(t) + \rho\cos(\alpha + \varphi(t)), \\ y(t) &= y_A(t) + \rho\sin(\alpha + \varphi(t)). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Уравнения (3.3) одновременно являются и параметрическими уравнениями траектории точки M.

3.3. Скорости точек твердого тела. Скорость произвольной точки M получается дифференцированием по времени равенства (3.2)

$$\mathbf{v}_M = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{MA}, \tag{3.4}$$

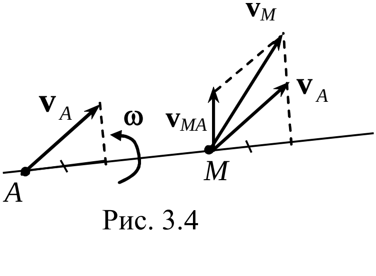


Рис. 3.4

где $\mathbf{v}_A$ – скорость полюса A, а $\mathbf{v}_{MA}$ – скорость вращательного движения точки M вокруг полюса A (скорость вращательного движения тела в системе координат Ax_1y_1). Вектор $\mathbf{v}_{MA}$ направлен перпендикулярно отрезку AM в сторону вращения, а его модуль равен $|\mathbf{v}_{MA}| = |\omega| \cdot AM$.

Таким образом, *скорость произвольной точки твердого тела, совершающего плоское движение, геометрически складывается из скорости какой-нибудь другой точки* A *, принятой за полюс, и скорости этой точки в ее вращении вместе с телом вокруг полюса.*

Соотношение (3.4) дает два следствия.

Следствие 1. *Проекции скоростей двух точек тела на прямую, их соединяющую, равны* (рис. 3.4).

Следствие 2. *Если точки A, B и C сечения* S *лежат на одной прямой, то концы векторов скоростей этих точек,* $\mathbf{v}_A, \mathbf{v}_B, \mathbf{v}_C$ *, тоже лежат на одной прямой, причем* $ab / bc = AB / BC$ (рис. 3.5).

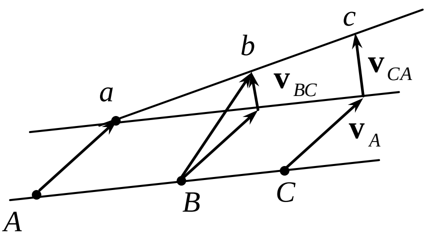
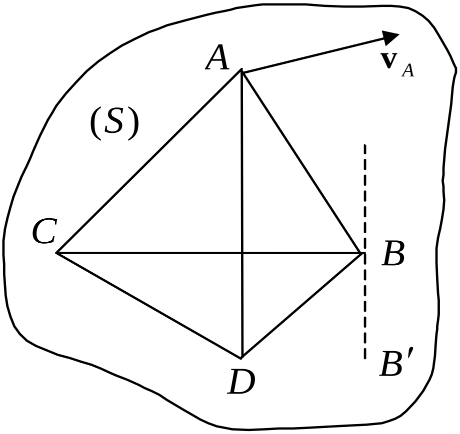


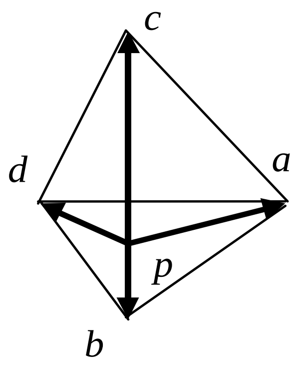
Рис. 3.5

3.4. План скоростей. Для графического определения скоростей точек используется *план скоростей* – диаграмма, на которой из некоторого центра в заданном масштабе отложены векторы скоростей точек тела. Для этого необходимо только, чтобы скорость одной точки плоской фигуры была задана (и модуль, и направление) и было известно направление скорости другой точки. Рассмотрим, например, плоскую фигуру S (рис. 3.6*а*). Пусть известны направление и величина скорости точки A и направление скорости точки B (вдоль BB'). Необходимо найти скорости точек B, C и D.

Возьмем некоторую точку p за центр диаграммы и из нее в выбранном масштабе отложим вектор $\mathbf{pa} = \mathbf{v}_A$. Далее план скоростей продолжим строить для точки B. Из полюса p проведем линию pb вдоль направления скорости $\mathbf{v}_B$. В силу равенства (3.4) векторы $\mathbf{v}_A$, $\mathbf{v}_B$ и $\mathbf{v}_{BA}$ образуют замкнутую фигуру, треугольник. Но, так как $\mathbf{v}_{BA} \perp AB$, то, опустив из точки a прямую, перпендикулярную AB, мы на ее пересечении с линией pb и получим точку b такую, что $\mathbf{pb} = \mathbf{v}_B$ (в заданном масштабе), а $\mathbf{ab} = \mathbf{v}_{BA}$.



а



б

Рис. 3.6

Найдем теперь скорость точки C. Согласно (3.4) $\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{CA}$ и $\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{CB}$. Откуда $\mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{CA} = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{CB}$, причем $\mathbf{v}_{CA} \perp CA$, $\mathbf{v}_{CB} \perp CB$. В соответствии с этим проведем из точки a (см. рис. 3.6*б*) прямую, перпендикулярную CA, а из точки b – прямую, перпендикулярную CB. Тогда точка c должна лежать одновременно на обоих этих перпендикулярах и, следовательно, лежит на их пересечении, а скорость $\mathbf{v}_C = \mathbf{pc}$.

Точно так же находится и скорость $\mathbf{v}_D$, $\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{DC}$, $\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{DA}$. А значит, $\mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{DC} = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{DA}$, и $\mathbf{v}_{DA} \perp AD$, $\mathbf{v}_{DC} \perp CD$. Проводя соответственно из точек c и a линии $cd \perp CD$ и $ad \perp AD$, мы на их пересечении получим точку d. В результате $\mathbf{v}_D = \mathbf{pd}$.

По плану скоростей можно определить угловую скорость рассматриваемой плоской фигуры. Действительно, так как $\mathbf{ab} = \mathbf{v}_{BA}$, $\mathbf{bc} = \mathbf{v}_{BC}$ и т.д., то

$$\omega = \frac{v_{BA}}{AB} = \frac{ab}{AB} = \frac{bc}{BC} = \frac{dc}{DC} = \frac{bd}{BD}. \qquad (3.5)$$

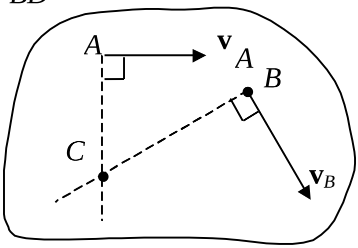


Рис. 3.7

План скоростей плоского механизма строится как совокупность планов скоростей отдельных его звеньев, причем все векторы скоростей строятся из общего центра.

3.5. Мгновенный центр скоростей (МЦС). *Мгновенным центром скоростей плоской фигуры называется точка, скорость которой в данный момент времени равна нулю*. Если угловая скорость тела в данный момент времени отлична от нуля, то МЦС существует и единственен. Для его определения необходимо знать направления скоростей каких-либо двух точек плоской фигуры. Если эти скорости не параллельны, то МЦС (точка C на рис. 3.7) находится в точке пересечения перпендикуляров, восстановленных из этих точек к их скоростям. Если же эти скорости параллельны, то для определения МЦС необходимо знать также и их модули. В этом случае способы построения МЦС показаны на рис. 3.8*а,б*. В случае, показанном на рис. 3.8*в,* движение плоской фигуры в данный момент времени является мгновенно поступательным, МЦС не существует (находится в бесконечности), и $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B$.

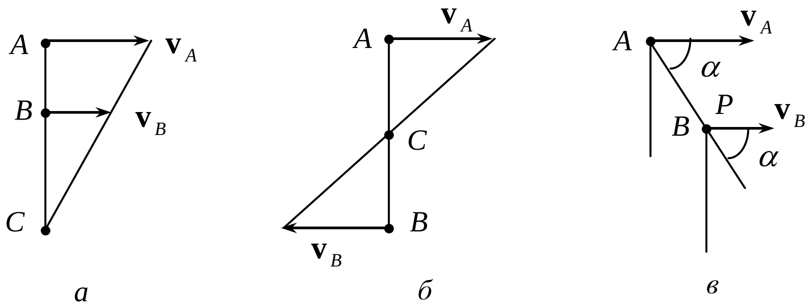


Рис. 3.8

Если в момент времени t, когда точка C является МЦС, взять ее за полюс, то скорость любой точки плоской фигуры будет равна ее скорости вращения вокруг МЦС

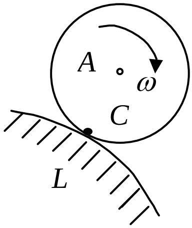


Рис. 3.9

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{AC} = \mathbf{v}_{AC} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{AC} . \tag{3.6}$$

Аналогично для любой другой точки фигуры $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_{BC} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{BC}$.

Но поскольку $\mathrm{v}_A = \omega \cdot AC, \quad \mathrm{v}_B = \omega \cdot BC$,

то

$$\frac{\mathrm{v}_A}{\mathrm{v}_B} = \frac{AC}{BC}, \quad \omega = \frac{\mathrm{v}_A}{AC} = \frac{\mathrm{v}_B}{BC} = \cdots \tag{3.7}$$

Поэтому, зная положение МЦС данной плоской фигуры и скорость какой-либо ее точки, можно определить скорость любой другой точки фигуры и ее угловую скорость.

Рассмотрим еще один случай определения МЦС. Пусть цилиндрическое тело A катится без скольжения по неподвижной поверхности L (рис. 3.9). Так как скольжение отсутствует, то точка соприкосновения тела с неподвижной поверхностью имеет скорость, равную нулю, и, следовательно, является МЦС.

В случае, если механизм состоит из нескольких твердых тел (звеньев), у каждого из тел (звеньев) свой МЦС.

3.6. Ускорения точек твердого тела при плоском движении. В соответствии с представлением плоского движения тела в

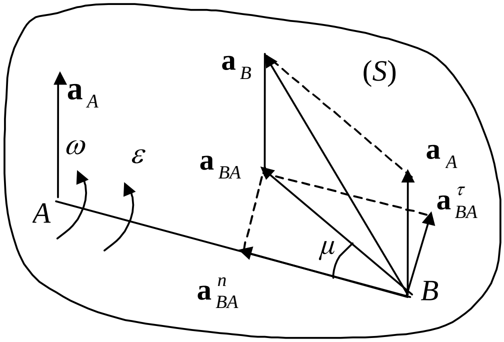


Рис. 3.10

виде суммы поступательного движения вместе с полюсом A и вращательного движения тела вокруг полюса A, ускорение любой точки B тела также представляется в виде суммы

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA}, \tag{3.8}$$

где $\mathbf{a}_A$ – ускорение точки A, а $\mathbf{a}_{BA}$ – ускорение вращательного движения точки B вокруг точки A.

Ускорение $\mathbf{a}_{BA}$ можно разложить на две составляющие: нормальное вращательное ускорение $\mathbf{a}_{BA}^{n}$, направленное к полюсу A (рис. 3.10), и касательное вращательное ускорение $\mathbf{a}_{BA}^{\tau}$, направленное перпендикулярно к BA, в сторону дуговой стрелки углового ускорения ε тела.

$$\mathbf{a}_{BA} = \mathbf{a}_{BA}^{n} + \mathbf{a}_{BA}^{\tau}. \tag{3.9}$$

Причем модули этих векторов равны $\mathrm{a}_{BA}^{\tau} = |\varepsilon| \cdot AB$, $\mathrm{a}_{BA}^{n} = \omega^2 \cdot AB$,

$\mathrm{a}_{BA} = \sqrt{(\mathrm{a}_{BA}^{n})^2 + (\mathrm{a}_{BA}^{\tau})^2} = AB\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}$, а тангенс угла наклона, образуемый векторами $\mathbf{a}_{BA}^{n}$ и $\mathbf{a}_{BA}^{\tau}$, равен

$$tg\mu = \frac{\mathrm{a}_{BA}^{\tau}}{\mathrm{a}_{BA}^{n}} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

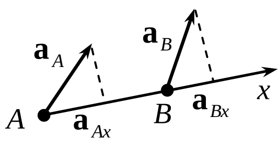


Рис. 3.11

Соотношение (3.8) теперь можно записать так:

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA}^{n} + \mathbf{a}_{BA}^{\tau}. \tag{3.10}$$

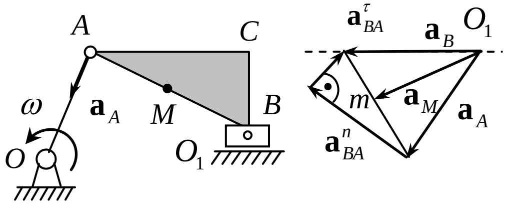
Для ускорений, как и для скоростей, можно сформулировать два следствия.

Следствие 1. *Проекции ускорений двух точек тела на прямую, их соединяющую, связаны соотношением* $a_{Bx} \le a_{Ax}$ (рис. 3.11).

Следствие 2. *Если точки A, B и C лежат на одной прямой, то и концы векторов ускорений этих точек,* $\mathbf{a}_A$, $\mathbf{a}_B$ *и* $\mathbf{a}_C$, *лежат на одной прямой, причем* $\dfrac{ab}{bc} = \dfrac{AB}{BC}$ (рис. 3.12).

3.7. План ускорений. По аналогии с планом скоростей можно, используя равенство (3.10) и его следствия, определять ускорения графически с помощью *плана ускорений.* В качестве иллюстрации определим графически ускорения точек A, B, M и C для механизма, изображенного на рис. 3.13*а*, если угловая скорость кривошипа $\omega = const$ и $AM = MB$.

Для построения плана ускорений сначала определим угловую скорость ω_{AB} звена ACB. Это можно сделать построением плана скоростей либо с помощью МЦС (сделайте это самостоятельно). Далее, рассматривая точку A как точку стержня OA, построим ускорение $\mathbf{a}_A$ (см. рис. 3.13*б*). Так как стержень OA вращается равно- мерно, то $\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_A^n$ и



а *б*

Рис. 3.13

$a_A = \omega^2 \cdot O_1A$

.

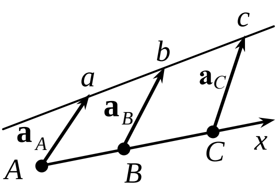


Рис. 3.12

Построим теперь ускорение точки B, используя формулу (3.10). Нам известно направление ускорения этой точки $\mathbf{a}_B$ (эта точка движется вдоль горизонтальной направляющей). Кроме того, вектор $\mathbf{a}_{BA}^n$ направлен вдоль вектора **BA** и равен по модулю $a^{n}_{BA} = \omega^{2}_{AB} \cdot BA$. Вектор же $\mathbf{a}^{\tau}_{BA}$ перпендикулярен $\mathbf{BA}$. Этого достаточно для графического определения ускорения $\mathbf{a}_{B}$. Соответствующее построение приведено на рис. 3.13*б*.

Чтобы построить вектор $\mathbf{a}_{M}$, проще всего воспользоваться следствием 2. Так как $AM = MB$, то конец m вектора $\mathbf{a}_{M}$ лежит на середине отрезка ab (см. рис. 3.13*б*).

Вектор $\mathbf{a}_{C}$ можно построить так. Сначала, воспользовавшись соотношением $a^{\tau}_{BA} = \varepsilon_{AB} \cdot AB$, следует определить угловое ускорение ε_{AB}. Затем следует измерить длину вектора a^{n}_{BA} на рис. 3.13*б* и воспользоваться формулами

$$\mathbf{a}_{C} = \mathbf{a}_{A} + \mathbf{a}^{n}_{CA} + \mathbf{a}^{\tau}_{CA}, \qquad (3.11)$$

$$\mathbf{a}_{C} = \mathbf{a}_{B} + \mathbf{a}^{n}_{CB} + \mathbf{a}^{\tau}_{CB}. \qquad (3.12)$$

Так как правые части этих формул уже полностью известны, то требуется только графически сложить три известных вектора.

Можно построить вектор $\mathbf{a}_{C}$ и без вычисления углового ускорения ε_{AB}. Для этого нужно графически строить вектор $\mathbf{a}_{C}$ “с двух сторон”, исходя из формул (3.11) и (3.12).

3.8. Кинематический расчет плоского механизма. На основе установленных соотношений для скоростей и ускорений плоских фигур можно проводить расчет кинематики движения плоских многозвенных механизмов. Обычно в таком механизме движение одного звена задано, а движение остальных звеньев требуется определить, т.е. определить скорости и ускорения отдельных точек этих звеньев, угловые скорости и угловые ускорения самих звеньев. Расчет такого механизма проводят, последовательно переходя от одного звена к другому либо графическими методами – с помощью плана скоростей, ускорений, построением МЦС, либо аналитически – проецируя соответствующие векторные уравнения на оси координат. Следует иметь в виду, что при аналитическом способе можно добиться любой наперед заданной точности расчета. Точность графических построений ограничена точностью построения чертежей.

4. Сложное движение точки

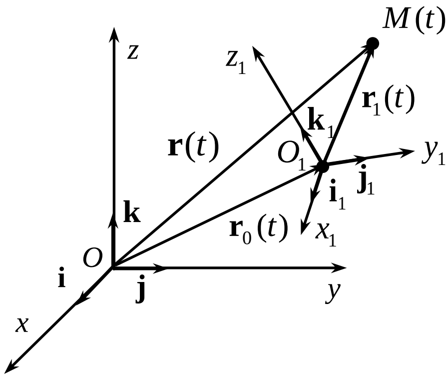


Рис. 4.1

Пусть точка M движется в системе отсчета $Oxyz$ и нам требуется определить ее скорость и ускорение. Одним из способов решения такой задачи является переход в другую, вспомогательную систему отсчета $O_1x_1y_1z_1$ (рис. 4.1). Тогда, решив задачу в системе $O_1x_1y_1z_1$ и зная, как она движется относительно исходной системы $Oxyz$, нужно будет еще восстановить искомые скорость и ускорение. Задача состоит в том, как это сделать. Но сначала договоримся о терминологии.

4.1. Абсолютное, относительное и переносное движения. Исходную систему координат $Oxyz$ будем называть *неподвижной,* а вспомогательную $O_1x_1y_1z_1$ – *подвижной.* Движение точки относительно неподвижной системы назовем *абсолютным*, а ее скорость и ускорение – *абсолютной скоростью* и *абсолютным ускорением* и будем обозначать индексом a (от слова *absolute* – абсолютный): $\mathbf{v}_a$, $\mathbf{a}_a$. Движение же точки относительно подвижной системы назовем *относительным*, соответственно скорость и ускорение – *относительной скоростью* и *относительным ускорением* и будем обозначать индексом r (от слова *relative* – относительный): $\mathbf{v}_r$, $\mathbf{a}_r$. Движение, совершаемое подвижной системой $O_1x_1y_1z_1$ относительно неподвижной системы $Oxyz$, назовем *переносным*. Скорость и ускорение точки M, вызванное переносным движением, назовем *переносной скоростью* и *переносным ускорением* и будем их обозначать индексом e (от *endure* – переносить): $\mathbf{v}_e$, $\mathbf{a}_e$. Иными словами, переносная скорость (ускорение) – это та скорость (ускорение), которую движущаяся точка M имела бы, если бы она в этот момент времени оказалась жестко связанной с подвижной системой координат.

Абсолютное движение точки мы рассмотрели как *сложное* и представили его суммой двух движений – относительного и переносного.

4.2. Теорема о сложении скоростей. Пусть $\mathbf{r}(t), \mathbf{r}_0(t)$ – соответственно радиус-вектор точки M и точки O_1 в неподвижной системе $Oxyz$, а $\mathbf{r}_1(t)$ – радиус-вектор точки M в подвижной системе $O_1x_1y_1z_1$ (см. рис. 4.1). Тогда

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0(t) + \mathbf{r}_1(t). \tag{4.1}$$

Дифференцируя (4.1) по времени с учетом подвижности единичных векторов $\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1$, получим равенство

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_e, \tag{4.2}$$

выражающее собой теорему о сложении скоростей*: абсолютная скорость точки равна сумме относительной и переносной скоростей.*

В случае произвольного движения подвижной системы отсчета $\mathbf{v}_e = \mathbf{v}_{O_1} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1$, где $\mathbf{v}_{O_1}$ – скорость начала O_1 подвижной системы отсчета, а $\boldsymbol{\omega}$ – ее угловая скорость вращения в системе координат $Oxyz$.

В случае, когда переносное движение поступательное $\boldsymbol{\omega} = 0$, $\mathbf{v}_e = \mathbf{v}_O$ и $\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_O + \mathbf{v}_r$.

Напротив, если переносное движение чисто вращательное, то $\mathbf{v}_O = 0$ и $\mathbf{v}_e = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1$, а $\mathbf{v}_a = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1 + \mathbf{v}_r$.

Модуль абсолютной скорости можно вычислить по формуле (теорема косинусов)

$$\mathrm{v}_a = \sqrt{\mathrm{v}_r^2 + \mathrm{v}_e^2 + 2\mathrm{v}_r \mathrm{v}_e \cos(\mathbf{v}_r, \mathbf{v}_e)}. \tag{4.3}$$

4.3. Теорема о сложении ускорений (теорема Кориолиса). Дифференцируя теперь равенство (4.2) с учетом подвижности единичных векторов $\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1$, получим выражение для определения абсолютного ускорения точки

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_c. \qquad (4.4)$$

Переносное ускорение в равенстве (4.4) вычисляется по формулам $\mathbf{a}_e = \mathbf{a}_{O_1} + \mathbf{a}_e^{вр} + \mathbf{a}_e^{цс}, \mathbf{a}_e^{вр} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}_1, \mathbf{a}_e^{цс} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1)$, в которых $\mathbf{a}_{O_1}$ – ускорение точки O_1 – начала подвижной системы отсчета, а $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ – соответственно угловая скорость и угловое ускорение ее вращения.

Через $\mathbf{a}_c$ в равенстве (4.4) обозначено так называемое *ускорение Кориолиса* (или кориоли́сово ускорение)

$$\mathbf{a}_c = 2\,\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r. \qquad (4.5)$$

Модуль кориоли́сова ускорения равен

$$\mathrm{a}_c = 2\omega\,\mathrm{v}_r \sin(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}_r) = 2\omega\,\mathrm{v}_r \sin\alpha, \qquad (4.6)$$

а направлено оно перпендикулярно плоскости векторов $\mathbf{v}_r$ и $\boldsymbol{\omega}$ в ту сторону, откуда вращение от $\boldsymbol{\omega}$ к $\mathbf{v}_r$ видно происходящим против часовой стрелки (рис. 4.2). Это ускорение обращается в нуль в трех случаях: если угловая скорость подвижной системы отсчета равна нулю $\boldsymbol{\omega} = 0$, т.е. переносное движение поступательное; если угловая скорость вращения подвижной системы отсчета параллельна относительной скорости $\boldsymbol{\omega} \parallel \mathbf{v}_r$; и, наконец, если относительная скорость точки равна нулю $\mathbf{v}_r = 0$.

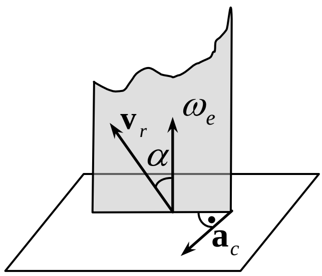


Рис. 4.2

Таким образом, *при сложном движении точки ее абсолютное ускорение равно сумме относительного* $\mathbf{a}_r$, *переносного* $\mathbf{a}_e$ *и кориоли́сова* $\mathbf{a}_c$ *ускорений.*

4.4. Рекомендации по решению задач на сложное движение точки. Решение задач на определение абсолютной скорости и абсолютного ускорения складывается из следующих этапов.

1. Представить движение точки как сложное и ввести подвижную систему отсчета. Здесь нужно иметь в виду, что это можно сделать различными способами.

2. Решить задачу в подвижной системе координат и найти $\mathbf{v}_r$ и $\mathbf{a}_r$.

3. Найти скорость и ускорение переносного движения точки $\mathbf{v}_e$ и $\mathbf{a}_e$. На этом этапе решения нужно мысленно остановить (“заморозить”) относительное движение точки.

4. Найти модуль и направление кориоли́сова ускорения $\mathbf{a}_c$. Для этого нужно оба вектора $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{v}_r$ отложить из одной точки и вспомнить определение векторного произведения векторов.

5. Вычислить абсолютную скорость и абсолютное ускорение по формулам (4.2), (4.4). Модуль абсолютной скорости вычисляется с использованием теоремы косинусов по формуле (4.3), а модуль абсолютного ускорения удобнее всего вычислять, проецируя векторное уравнение (4.4) на три взаимно перпендикулярные оси неподвижной системы координат.

5. Задание 1. Прямая и обратная задачи кинематики точки

Данное задание состоит из двух задач – прямой и обратной задач кинематики точки.

Задача 1. В этой задаче (прямой) движение точки задано векторным способом (табл. 5.1). Значения a и b следует взять из табл. 5.2. Номер столбца в табл. 5.2 указывается преподавателем.

Необходимо выполнить следующее:

1. Представить закон движения точки в координатной форме.
2. Найти уравнение траектории точки и построить саму траекторию.
3. Для момента времени $t_1 = 1 c$ найти и указать на траектории положение точки, ее скорость, полное, касательное и нормальное ускорения, а также определить радиус кривизны траектории.

Задача 2. Здесь требуется решить обратную задачу, т.е. по заданным проекциям вектора ускорения и заданным начальным условиям определить зависимость проекций скорости и координат точки от времени.

Проекции вектора ускорения даны в табл. 5.3. Значения постоянных a и b следует взять из табл. 5.5. Номер столбца в табл. 5.5 указывается преподавателем. Начальные условия – положение и скорость точки в начальный момент времени даны в табл. 5.4.

Таблица 5.1

1	$\mathbf{r} = at^2\mathbf{i} + (4 - bt^2)\mathbf{j}$
2	$\mathbf{r} = at^2\mathbf{j} + (bt^3 + 2)\mathbf{k}$
3	$\mathbf{r} = a\cos(\pi t/6)\mathbf{j} + (a\sin(\pi t/6) + b)\mathbf{k}$
4	$\mathbf{r} = ae^{2t}\mathbf{i} - be^{t}\mathbf{k}$
5	$\mathbf{r} = a\cos(2t)\mathbf{i} + (b\sin t)\mathbf{j}$
6	$\mathbf{r} = at\mathbf{i} + (1/bt + 2)\mathbf{k}$
7	$\mathbf{r} = (a + b\sqrt{1+t})\mathbf{i} + (a + b\ln\sqrt{1+t})\mathbf{k}$
8	$\mathbf{r} = at\mathbf{i} + (2t - t^2)\mathbf{k}$

Окончание табл. 5.1

9	$\mathbf{r}=a\sqrt{t}\mathbf{i}+be^{-t}\mathbf{k}$
10	$\mathbf{r}=at\mathbf{i}+b\cos(t)\mathbf{j}$
11	$\mathbf{r}=a\sin^2(\pi t)\mathbf{j}+(5+6\sin(2\pi t))\mathbf{k}$
12	$\mathbf{r}=a\,e^{3t}\mathbf{i}-b\,e^{-3t}\mathbf{j}$
13	$\mathbf{r}=t\mathbf{j}-\sin(2t)\mathbf{k}$
14	$\mathbf{r}=a\sin(at)\mathbf{i}-b\cos(at)\mathbf{j}$
15	$\mathbf{r}=a\,t^3\mathbf{i}-bt^2\mathbf{k}$
16	$\mathbf{r}=(ae^t-b)\mathbf{i}-(ae^t+b)\mathbf{j}$
17	$\mathbf{r}=(a\sin t)\mathbf{i}+b\cos(2t)\mathbf{j}$
18	$\mathbf{r}=2a\,ctg^2(bt)\mathbf{j}-2a\,ctg(bt)\mathbf{k}$
19	$\mathbf{r}=a\cos(bt)\mathbf{i}+a\sin(bt)\ tg(tb/2)\mathbf{k}$
20	$\mathbf{r}=a\cos(2\pi t)\mathbf{i}-(b+a\sin(\pi t))\mathbf{k}$
21	$\mathbf{r}=(a\cos^2 t)\mathbf{j}+(b\sin^2 t)\mathbf{k}$
22	$\mathbf{r}=a\sin(2t)\mathbf{i}+(b\cos^2 t)\mathbf{j}$
23	$\mathbf{r}=a(e^{2t}+e^{-2t})\mathbf{j}-a(b+e^{2t}-e^{-2t})\mathbf{k}$
24	$\mathbf{r}=(a\cos^2 t)\mathbf{i}+(b\sin t)\mathbf{j}$
25	$\mathbf{r}=a\sin(bt)\mathbf{i}+b\ln(\sin(bt))\mathbf{j}$
26	$\mathbf{r}=(at)\mathbf{i}+(b\ln t)\mathbf{j}$
27	$\mathbf{r}=at^2\mathbf{i}-bt^4\mathbf{j}$
28	$\mathbf{r}=(a\ln t)\mathbf{i}+bt^2\mathbf{j}$
29	$\mathbf{r}=ae^{-8t}\mathbf{i}-(bt)\mathbf{j}$
30	$\mathbf{r}=at^2\mathbf{i}+be^{-6t}\mathbf{j}$

Таблица 5.2

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	3	–2	1	4	3	2	–7	4	5	2
b	4	6	3	2	–2	1	5	6	–2	3

Таблица 5.3

№	$\ddot{x} = f_1(t)$	$\ddot{y} = f_2(t)$
1	a	$\cos(bt)\cdot\cos(at)$
2	$\sin(at)\cdot\cos(bt)$	b
3	0	$a/b(t+1)^3$
4	$a\cos t + b$	$b\sin(2t) - a$
5	$-a/(4+t)^2 + b/\sqrt{t+4}$	$at(t+4)$
6	$0.5ae^{2t} - 2$	$be^{-2t} + 3$
7	$a\cos t + b\sqrt{t}$	$at\sqrt[4]{t}$
8	$\sqrt{t+5}$	$at^3 - b\sin t$
9	$b - at^2$	$a\cos\left((a+b)t\right)\cdot\sin\left((a+b)t\right)$
10	$a\cos t - b\sin t$	$a\cos(2t)$
11	at	$a\left(t^5 - \sin(bt)\right)$
12	0	$8/\sqrt[3]{t+1} + a\sqrt{t+1}$
13	$1/\sqrt{a+t} + 2$	$1/(b+t)^4$
14	$a\sin(2t)$	a
15	$a(e^t + e^{-t})$	$b(e^t - e^{-t})$
16	$a\cos(3t)$	$b\sin(t/2) + a$
17	$at^2 + bt + 1/\sqrt{t+2}$	$(at^3 + bt^4)/t^2$
18	$b + a\cos(at)$	$a + b\sin(at)$
19	ae^{-3t}	$b + a\cos t$
20	$a(e^{bt} + e^{-bt})$	$\sin(bt)\cdot\sin(at)$
21	$-a/(t+b)^3$	0
22	$b\sin(at)$	$\sin(at/2)$
23	$\left(a(t+3)^2 - 7\right)/b(t+3)^2$	$a\sqrt{t} + b$

Окончание табл. 5.3

	$\ddot{x} = f_1(t)$	$\ddot{y} = f_2(t)$
4	0	$-at+b$
5	$a\sqrt{t}+\sin(bt)$	$ae^{t}-be^{-t}$
6	$ae^{bt}+b$	$\sqrt{at}-b$
7	$a\sin(bt)-b\cos(at)$	$a\sqrt[3]{bt}-b\sqrt{at}$
8	$a\cos^2(bt)$	$b\sin^2(at)$
9	$at-bt^2+2$	$a\sin((a+b)t)-b\cos(at)$
0	$a(t-1)^2+b(t-1)+3$	$a\sqrt{t}+b\sqrt[3]{t+2}$

Таблица 5.4

№	$v_{x}\vert_{t=0}$	$x\vert_{t=0}$	$v_{y}\vert_{t=0}$	$y\vert_{t=0}$	№	$v_{x}\vert_{t=0}$	$x\vert_{t=0}$	$v_{y}\vert_{t=0}$	$y\vert_{t=0}$
1	0	3	–5	0	16	5	1	9	2
2	–1	1	–3	–2	17	3	5	7	5
3	4	4	1	1	18	6	1	1	6
4	3	0	0	1	19	2	4	0	0
5	–5	2	4	0	20	–7	3	1	8
6	3	6	8	1	21	4	0	5	1
7	4	2	1	7	22	7	9	1	5
8	–1	0	3	0	23	5	8	2	4
9	6	7	3	2	24	7	3	0	4
10	1	6	9	7	25	8	15	0	–10
11	0	5	1	4	26	9	9	45	0
12	1	0	5	2	27	0	14	0	16
13	1	7	8	1	28	34	0	89	0
14	7	4	9	1	29	9	0	7	0
15	3	8	3	5	30	1	0	0	–1

Таблица 5.5

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	3	–4	1	2	6	3	5	7	8	2
b	7	5	3	4	1	4	2	1	3	4

Пример 1 (прямая задача кинематики точки). Требуется решить задачу 1, если закон движения точки *M* задан в виде

$$\mathbf{r}(t) = 2t^2\mathbf{i} + (4t^4 + 3)\mathbf{j}. \qquad (5.1)$$

Решение. Согласно (5.1) точка движется в плоскости Oxy, и уравнения ее движения в координатной форме имеют вид

$$x = 2t^2 \text{ м}, \ y = 4t^4 + 3 \text{ м}. \qquad (5.2)$$

Исключая параметр t из уравнений (5.2), видим, что траектория движения точки *M* лежит на параболе

$$y = x^2 + 3. \qquad (5.3)$$

При этом траектория занимает не всю параболу (рис. 5.1), а только часть ее, соответствующую значениям $x \geq 0$ (так как $x = 2t^2 \geq 0$). Сначала точка *M* из бесконечности приходит в точку (0,3) в момент времени $t = 0$ *с*, затем по тому же пути вновь удаляется на бесконечность.

Найдем проекции скорости и ускорения точки *M* на координатные оси *Ox* и *Oy*:

$$\mathrm{v}_x(t) = \dot{x}(t) = 4t, \ \mathrm{v}_y(t) = \dot{y}(t) = 16t^3,$$

$$a_x(t) = \ddot{x}(t) = 4, \ a_y(t) = \ddot{y}(t) = 48t^2.$$

Для модулей скорости и ускорения точки *M* получим выражения

$$\mathrm{v}(t) = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{16t^2 + \left(16t^3\right)^2},$$

$$a(t) = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \sqrt{16 + \left(48t^2\right)^2}.$$

Найдем теперь тангенциальное и нормальное ускорения точки M. Направим единичный вектор $\boldsymbol{\tau}$ вдоль траектории в сторону увеличения координаты *x* (см. рис. 5.1), а единичный вектор нормали $\mathbf{n}$ – в сторону вогнутости параболической траектории. Тогда тангенциальное ускорение будет равно

$$a_\tau(t) = \mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\tau} = \pm\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \pm\frac{16t + 768t^5}{\sqrt{16t^2 + \left(16t^3\right)^2}}.$$

Мы здесь учли, что вектор $\boldsymbol{\tau} = \pm\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$, причем знак “+” следует выбирать для $t > 0$ и знак “–” для $t < 0$.

Нормальное ускорение вычислим по формуле

$$a_n(t) = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \frac{128t^3}{\sqrt{16t^2 + \left(16t^3\right)^2}}.$$

Найдем, наконец, радиус кривизны траектории в точке M

$$\rho(t) = \frac{\mathrm{v}^2(t)}{a_n(t)} = \frac{\left(16t^2 + \left(16t^3\right)^2\right)^{3/2}}{128t^3}.$$

Искомые величины при $t = 1\,c$ будут равны

$x_M(1) = 2$ *м*, $y_M(1) = 7$ *м*, $\dot{x}_M(1) = 4$ *м/с*, $\dot{y}_M(1) = 4d = 16$ *м/с*,

$\ddot{x}_M(1) = 4$ *м/с*^{2}, $\ddot{y}_M(1) = 48$ *м/с*^{2}, $a_M(1) = 48.2$ *м/с*^{2},

$a_{M\tau}(1) = 47.5$ *м/с*^{2}, $a_{Mn}(1) = 7.76$ *м/с*^{2}, $\rho_M(1) = 17.52$ *м*.

На рис. 5.1 схематично показана траектория движения точки, положение M_1 точки при $t = 1$ *с* на траектории, направление вектора скорости и векторов тангенциального и нормального ускорений точки в этот же момент времени.

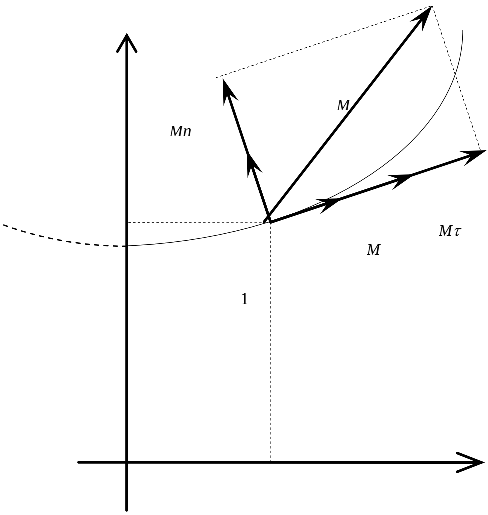


Рис. 5.1

Пример 2 (обратная задача кинематики точки). Точка M движется в плоскости Oxy так, что проекции ее ускорения на оси Ox и Oy равны соответственно $a_x = -\pi^2 \sin(\pi t/2)$, $a_y = \pi t$ *м/с*^{2}. Найти уравнения движения точки M, если ее начальная скорость при $t = 0$ задана проекциями $\mathrm{v}_{0x} = 2\pi$, $\mathrm{v}_{0y} = 2\pi$ *м/с*, а начальное положение определяется координатами $x_0 = 0$, $y_0 = 4\pi^2$ *м* (в момент времени $t = 0$).

Решение. Сначала найдем проекции скорости точки M

$$\mathrm{v}_x(t) = \mathrm{v}_{0x} + \int_0^t a_x(\tau) d\tau = 2\pi + \int_0^t \left(-\pi^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\tau \right) \right) d\tau =$$

$$= 2\pi + \pi^2 \frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}\tau \right) \Big|_0^t = 2\pi \cos\left(\frac{\pi}{2} t \right) \text{ м/с},$$

$$\mathrm{v}_y(t) = \mathrm{v}_{0y} + \int_0^t a_y(\tau)d\tau = 2\pi + \int_0^t \pi\tau d\tau = 2\pi + \left.\frac{\pi\tau^2}{2}\right|_0^t =$$

$2\pi + \dfrac{\pi t^2}{2}$ *м/с*.

Положение точки M по найденным значениям $\mathrm{v}_x(t), \mathrm{v}_y(t)$ проекций ее скорости определится выражениями

$$x(t) = x_0 + \int_0^t \mathrm{v}_x(\tau)d\tau = 0 + \int_0^t 2\pi\cos\left(\frac{\pi}{2}\tau\right)d\tau =$$

$$= 2\pi\frac{2}{\pi}\sin\left.\left(\frac{\pi}{2}\tau\right)\right|_0^t = 4\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right),$$

$$y(t) = y_0 + \int_0^t \mathrm{v}_y(\tau)d\tau = 4\pi^2 + \int_0^t \left(2\pi + \frac{\pi\tau^2}{2}\right)d\tau =$$

$$= 4\pi^2 + \left.(2\pi\tau)\right|_0^t + \left.\left(\frac{\pi\tau^3}{6}\right)\right|_0^t = 4\pi^2 + 2\pi t + \frac{\pi t^3}{6} \text{ м.}$$

Таким образом, уравнения движения точки M имеют вид

$$x(t) = 4\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right),\ y(t) = 4\pi^2 + 2\pi t + \frac{\pi t^3}{6}.$$

6. Задание 2. Поступательное и вращательное движения твердого тела

Определить скорость и ускорение точки M одного из колес механизма в момент времени $t = t_1$. Схемы механизмов показаны на рис. 6.1–6.4. Колеса, обозначенные на рисунках одной цифрой, жестко соединены друг с другом. Нити, соединяющие колеса между собой, считать нерастяжимыми, проскальзыванием в точках касания колес между собой и со стержнем пренебречь. Стержень 1 движется вдоль оси x с постоянным ускорением. Проекция ускорения стержня на ось x равна a_x *см/с*^{2}, проекция на эту ось его скорости в начальный момент времени равна v_{0x} *см/с*. Необходимые данные приведены в табл. 6.1.

Пример. Определить в момент времени $t_1 = 1$ *с* скорость и ускорение точки M колеса 3 механизма, изображенного на рис. 6.5. Радиусы колес механизма: $R_2 = 15$ *см,* $r_2 = 5$ *см,* $R_3 = 20$ *см,* $r_3 = 10$ *см.* Стержень 1 движется вдоль оси x с постоянным ускорением, причем $\mathrm{a}_x = -3$ *см/с*^{2} , $\mathrm{v}_{0x} = 8$ *см/с*.

Решение. Для нахождения скорости и ускорения точки M необходимо связать между собой кинематические характеристики стержня и двух колес. Поскольку стержень движется поступательно, все его точки имеют одинаковые скорости и ускорения. Проекция на ось x скорости точки A стержня равна

$$\mathrm{v}_{Ax}(t) = \int \mathrm{a}_x dt = \int (-3)\,dt = -3t + c_1 = 8 - 3t \ . \qquad (6.1)$$

Константа c_1 определена из начального условия $\mathrm{v}_{Ax}(0) = \mathrm{v}_{0x} = 8$. Отсутствие проскальзывания в точке A позволяет записать уравнение, связывающее модули скорости точки A v_A и угловой скорости ω_2 колеса 2: $|\mathrm{v}_A(t)| = |\omega_2(t)| \cdot r_2$. Из рис. 6.5 видно, что при движении стержня в положительном направлении оси x колесо 2 будет вращаться по часовой стрелке (напомним, что положительным считается направление вращения против часовой стрелки), поэтому

$$\omega_2(t) = -\mathrm{v}_{Ax}(t) / r_2 = 0.6t - 1.66 \ (1/c). \qquad (6.2)$$

Таблица 6.1

№	РАДИУСЫ, *СМ*				СКОРОСТЬ СТЕРЖНЯ 1 v_{0x}	УСКОРЕНИЕ СТЕРЖНЯ 1 a_x	T_1, *С*
	R_2	R_2	R_3	R_3			
1	**60**	**–**	**36**	**24**	**2**	**–1**	**1**
2	**80**	**60**	**20**	**–**	**3**	**–2**	**2**
3	**100**	**60**	**75**	**–**	**–4**	**2**	**2**
4	**50**	**–**	**60**	**45**	**–4**	**–3**	**1**
5	**80**	**30**	**45**	**–**	**3**	**–1**	**3**
6	**100**	**20**	**30**	**–**	**–7**	**1**	**2**
7	**45**	**35**	**105**	**–**	**8**	**–5**	**1**
8	**35**	**10**	**10**	**–**	**–6**	**2**	**2**
9	**40**	**30**	**15**	**–**	**0**	**7**	**2**
10	**35**	**15**	**40**	**–**	**–5**	**–3**	**1**
11	**40**	**25**	**20**	**–**	**–9**	**8**	**2**
12	**20**	**15**	**10**	**–**	**5**	**–1**	**1**
13	**30**	**20**	**40**	**20**	**–1**	**4**	**2**
14	**15**	**–**	**50**	**40**	**–2**	**–1**	**1**
15	**15**	**10**	**15**	**–**	**5**	**2**	**3**
16	**20**	**10**	**25**	**15**	**4**	**–1**	**2**
17	**15**	**10**	**20**	**–**	**8**	**–4**	**3**
18	**20**	**15**	**30**	**18**	**–3**	**2**	**2**
19	**15**	**10**	**20**	**12**	**5**	**1**	**1**
20	**25**	**15**	**50**	**–**	**0**	**8**	**3**
21	**20**	**10**	**30**	**–**	**6**	**–5**	**2**
22	**40**	**20**	**35**	**–**	**7**	**–2**	**2**
23	**40**	**30**	**30**	**–**	**–10**	**9**	**1**
24	**30**	**15**	**40**	**20**	**9**	**8**	**1**
25	**50**	**20**	**60**	**–**	**–8**	**–4**	**3**
26	**32**	**24**	**48**	**16**	**–4**	**4**	**2**
27	**40**	**18**	**40**	**–**	**5**	**–1**	**2**
28	**40**	**20**	**40**	**–**	**8**	**5**	**3**
29	**25**	**20**	**30**	**–**	**4**	**–1**	**2**
30	**30**	**–**	**20**	**15**	**–1**	**3**	**2**

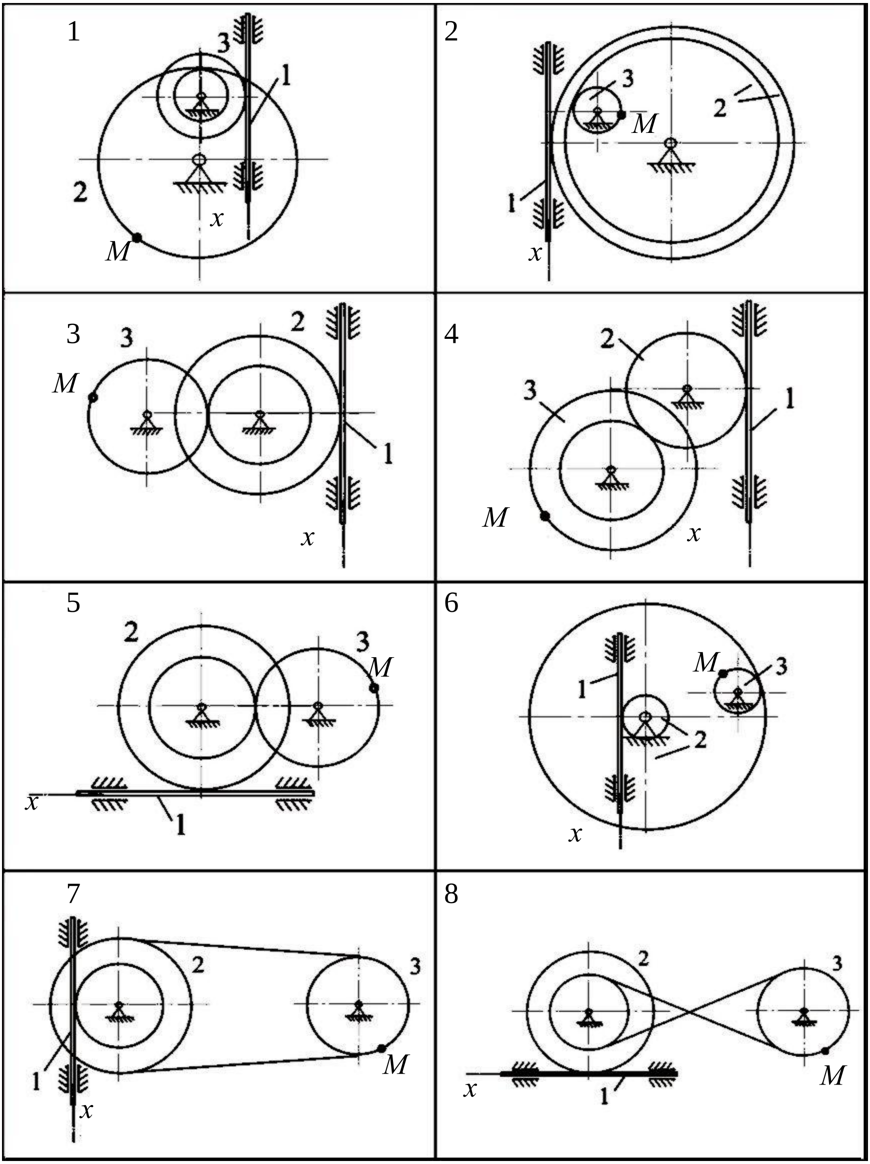


Рис. 6.1

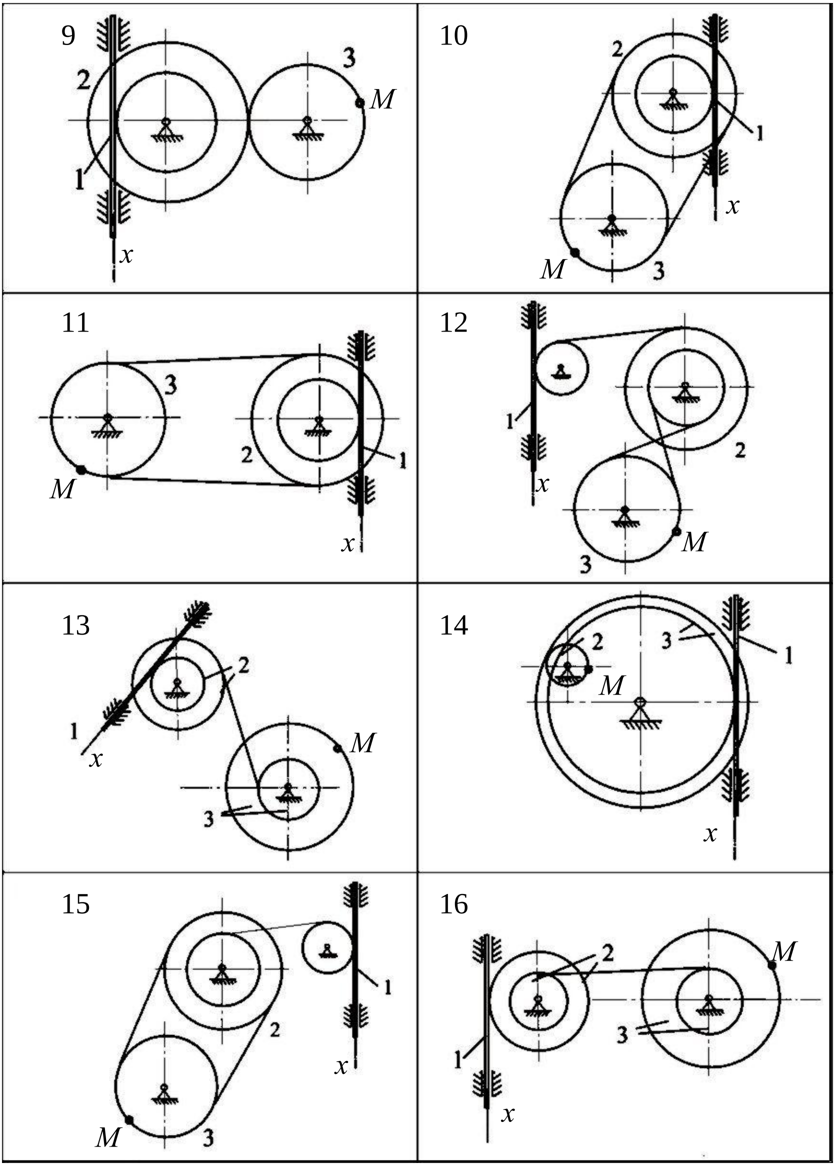

9
2
3
M
1
x
10
2
1
x
M
3
11
3
2
1
M
x
12
1
2
x
M
3
13
2
1
x
M
3
14
2
3
1
M
x
15
1
2
x
M
3
16
2
M
3
1
x

Рис. 6.2

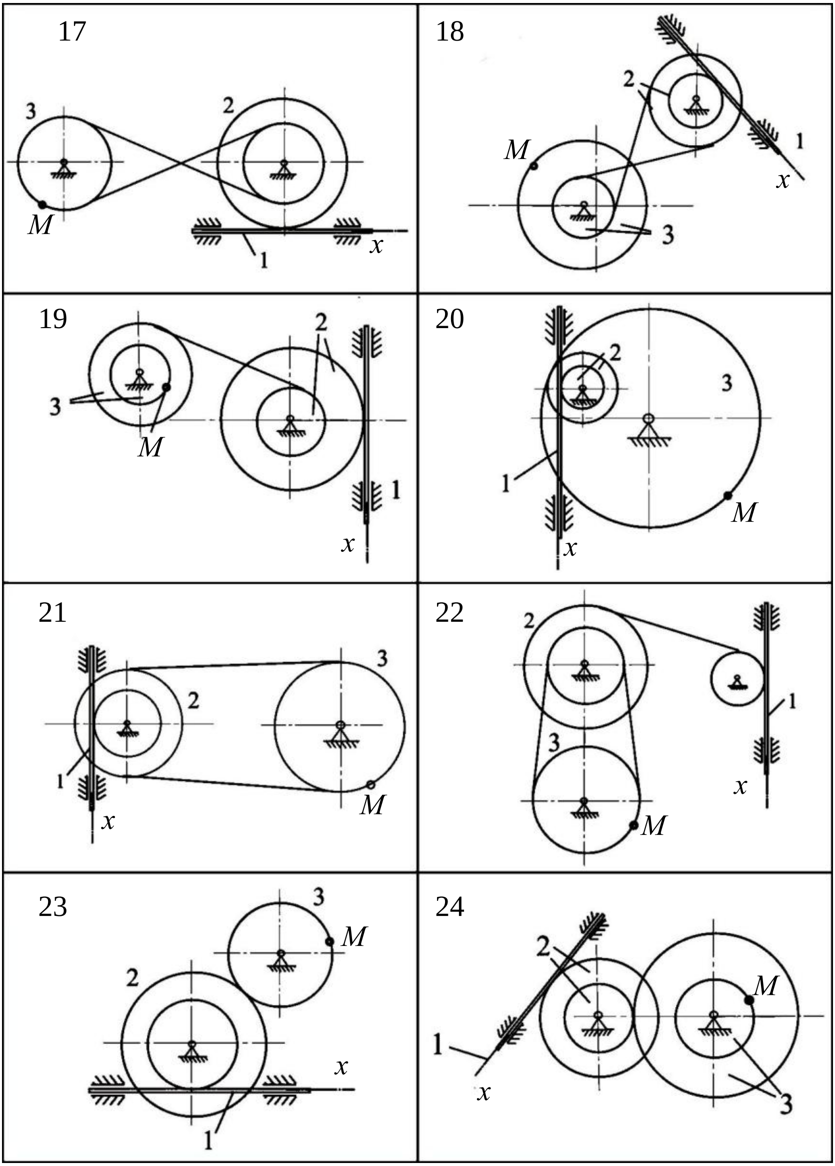

17
3
2
M
1
x
18
2
M
1
x
3
19
2
3
M
1
x
20
2
3
1
M
x
21
3
2
1
M
x
22
2
1
3
x
M
23
3
M
2
x
1
24
2
M
1
x
3

Рис. 6.3

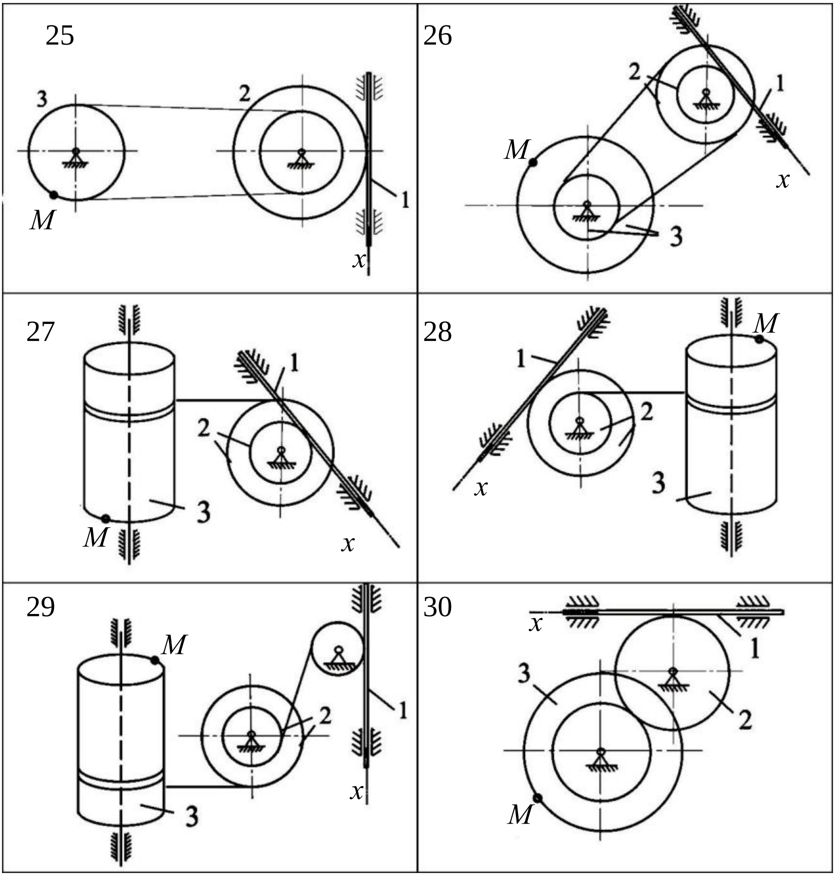


Рис. 6.4

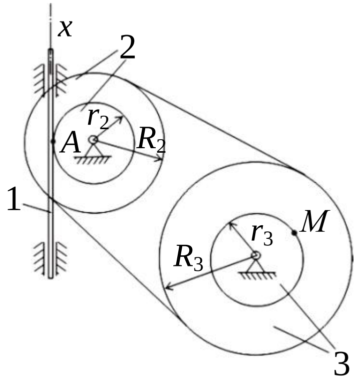


Рис. 6.5

Поскольку соединяющая колеса 2 и 3 нить является нерастяжимой, модули скоростей точек, лежащих на ободе этих колес, одинаковы, следовательно,

$$|\omega_2(t)|R_2 = |\omega_3(t)|R_3,$$

$$\omega_3(t) = \omega_2(t)\frac{R_2}{R_3} = 0.45t - 1.25 \ (1/c). \tag{6.3}$$

В формуле (6.3), связывающей угловые скорости, учтено, что колеса вращаются в одном направлении.

Угловое ускорение колеса 3 равно

$$\varepsilon_3 = d\omega_3/dt = 0.45 \ (1/c^2).$$

Модули скорости точки M, ее тангенциального, нормального и полного ускорений определяются по формулам

$$|\mathrm{v}_M| = |\omega_3|\cdot r_3,$$

$$|a_M^\tau| = |\varepsilon_3|\cdot r_3,$$

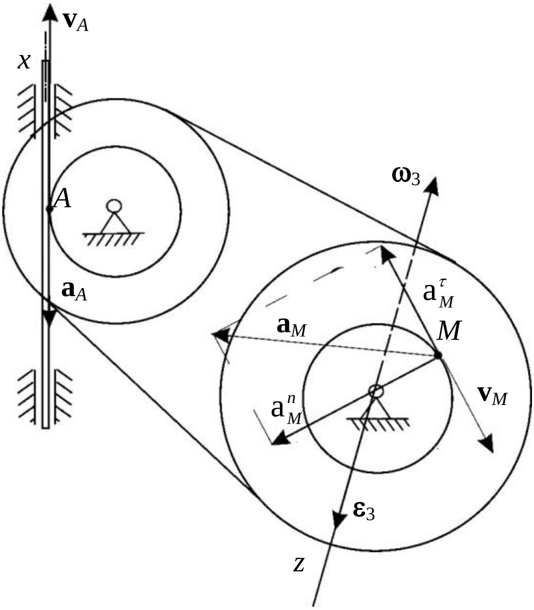
$$|a_M^n| = \omega_3^2\cdot r_3,$$

$$|a_M| = \sqrt{\left(a_M^\tau\right)^2 + \left(a_M^n\right)^2}.$$

Результаты вычислений для заданного момента времени $t = t_1$ приведены в табл. 6.2, направления скоростей и ускорений тела 3 и точки M показаны на рис. 6.6 (ось z “смотрит на нас”).

Таблица 6.2

ω_3	ε_3	$\lvert v_M \rvert$	$\lvert a_M^\tau \rvert$	$\lvert a_M^n \rvert$	$\lvert a_M \rvert$
–0.8	0.45	8	4.5	6.4	7.82



7. Задание 3. Определение абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки

Материальная точка *M* движется по закону $OM = s(t)$ вдоль линии *OD* тела, изображенного на рис. 7.1–7.3. Само тело также движется. Его движение определяется функцией $\varphi_e = \varphi_e(t)$, $\varphi = \varphi(t)$ или $x_e = x_e(t)$, в зависимости от рассматриваемого варианта. Зависимость указанных выше функций от времени дана в табл. 7.1. Значения параметров a, b и c задаются преподавателем указанием номера столбца в табл. 7.1 (для параметра a) и номера столбца в табл. 7.2 (для параметров b и c). Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки *M* для момента времени t = 1 *с*.

Таблица 7.1

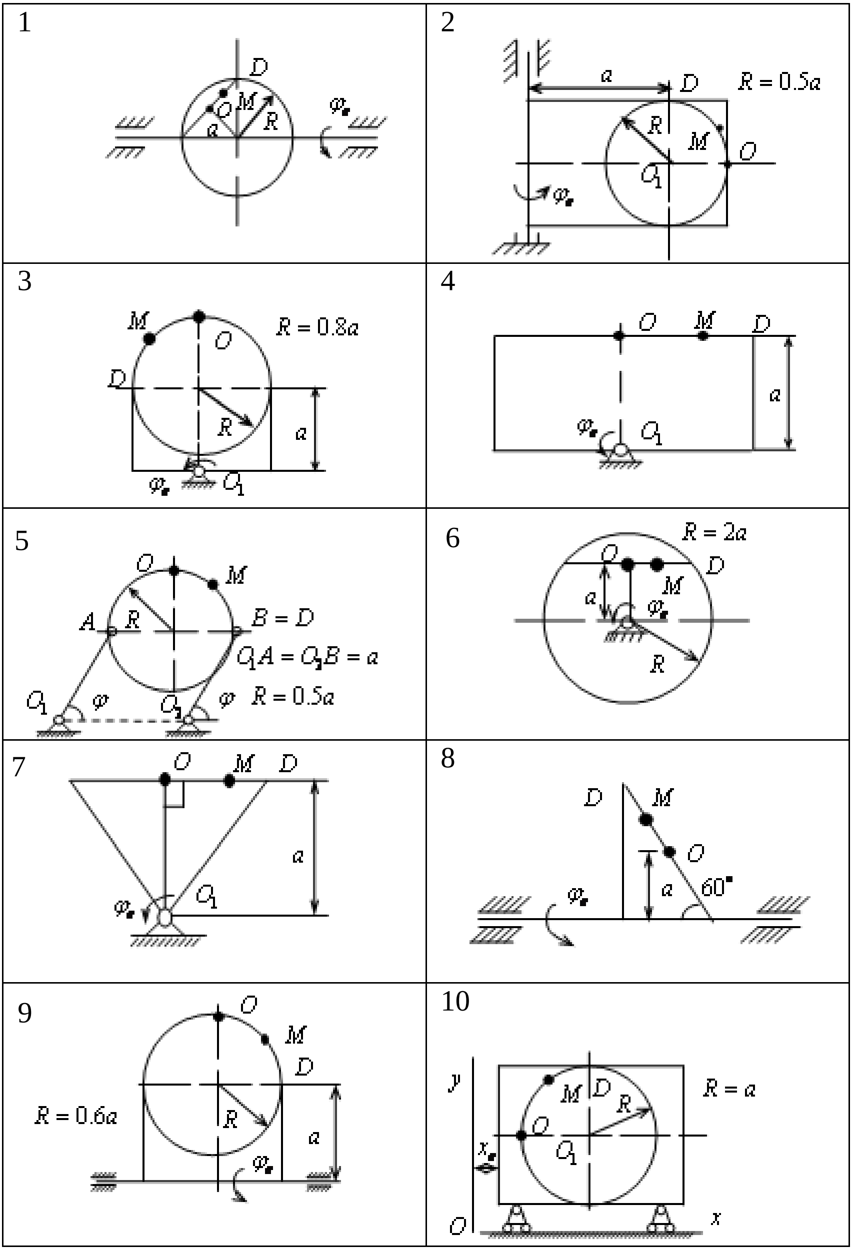
№	Переносное движение $\varphi_e(t), x_e(t), \varphi(t)$	Относительное движение $OM = s(t)$	*a, см*				
			1	2	3	4	5
1	$\varphi_e = 4t^2 - bt^3$	$c \cdot t^2$	13	16	18	15	12
2	$\varphi_e = 2t^3 - bt^2$	$c \cdot \sin(\pi/6)t$	12	14	19	18	13
3	$\varphi_e = 3t^3 - bt^2$	$c \cdot \cos(\pi/5)t$	13	15	14	16	17
4	$\varphi_e = 2t^4 - bt^2$	$2 + ct^3$	14	13	15	16	12
5	$\varphi = 5t - bt^3$	$c \cdot \sin(\pi/8)t$	10	12	18	17	15
6	$\varphi_e = 4t^2 - bt^3$	$ct^3 + 3$	12	13	14	15	16
7	$\varphi_e = bt^2 - 2t$	$4 + ct^3$	18	10	12	14	16
8	$\varphi_e = bt^2 - 5t$	$ct^4 + 2$	17	19	11	16	18
9	$\varphi_e = t^2 + bt^3$	$c \cdot \sin(\pi/4)t$	18	10	11	12	14
10	$x_e = b\sin(\pi/3)t$	$c \cdot \cos(\pi/4)t$	16	14	10	18	17
11	$\varphi_e = b\cos(\pi/3)t$	$2t^2 - ct^3$	15	14	17	19	16
12	$\varphi_e = 6t - bt^4$	$c \cdot \sin(\pi/7)t$	17	19	11	13	10

Окончание табл. 7.1

№	Переносное движение $\varphi_e(t), x_e(t), \varphi(t)$	Относительное движение $OM = s(t)$	*a, см*				
			1	2	3	4	5
13	$\varphi_e = 8t^2 - bt^3$	$c \cdot \sin(\pi/9)t$	13	12	15	17	16
14	$\varphi_e = 6t^3 - bt^2$	$ct^2 + 2$	12	14	15	18	20
15	$\varphi_e = bt^3 - 6t^2$	$ct^2 + 4$	20	30	25	35	40
16	$\varphi_e = bt^2 - 8t$	$c \cdot \cos(2t)$	20	40	30	50	35
17	$\varphi_e = 2bt^3 - 6t$	$c \cdot \sin t$	15	10	20	25	30
18	$x_e = 9t - bt^3$	$c \cdot \sin(3t)$	10	15	12	18	20
19	$\varphi_e = 5t^3 - bt^2$	$c \cdot \cos(3t)$	15	20	30	25	40
20	$\varphi_e = bt^2 - 2t$	$c \cdot \sin(4t)$	10	15	13	18	20
21	$\varphi_e = 2t - bt^4$	$c \cdot \sin(2t)$	16	10	14	11	19
22	$\varphi = bt^3 - 4t$	$c \cdot \cos(5t)$	10	12	18	17	16
23	$\varphi_e = b\sin t$	$c \cdot \sin(\pi/3)\,t$	15	17	19	11	10
24	$\varphi_e = 5t - bt^4$	$c \cdot \sin(\pi/4)\,t$	16	10	11	15	20
25	$\varphi_e = b\sin(\pi/6)t$	$c \cdot \sin(\pi/6)\,t$	10	20	22	30	25
26	$\varphi_e = b\cos(\pi/8)t$	$ct^4 + 3t$	15	20	30	25	18
27	$\varphi = b\sin(10t)$	$ct^3 - 4t$	10	18	16	17	18
28	$\varphi_e = b\sin(5t)$	$t^4 - ct^2$	11	14	16	20	18
29	$\varphi_e = b\cos(5t)$	$c \cdot \sin(\pi/6)t$	10	10	20	15	12
30	$\varphi_e = b\sin(3t)$	$ct^2 - t^3$	10	18	18	18	15

Таблица 7.2

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b	10	8	12	7	9	11	14	13	15	16
c	3	5	4	–2	2	4	–5	3	5	2



1
D
O
M
R
a
2
a
D
R = 0.5a
R
M
O
3
M
O
R = 0.8a
D
R
a
4
O
M
D
a
5
O
M
A
R
B = D
O1A = O2B = a
R = 0.5a
6
R = 2a
O
D
M
a
R
7
O
M
D
a
8
D
M
O
a
60°
9
O
M
D
R = 0.6a
R
a
10
y
M
D
R
R = a
O
x

Рис. 7.1

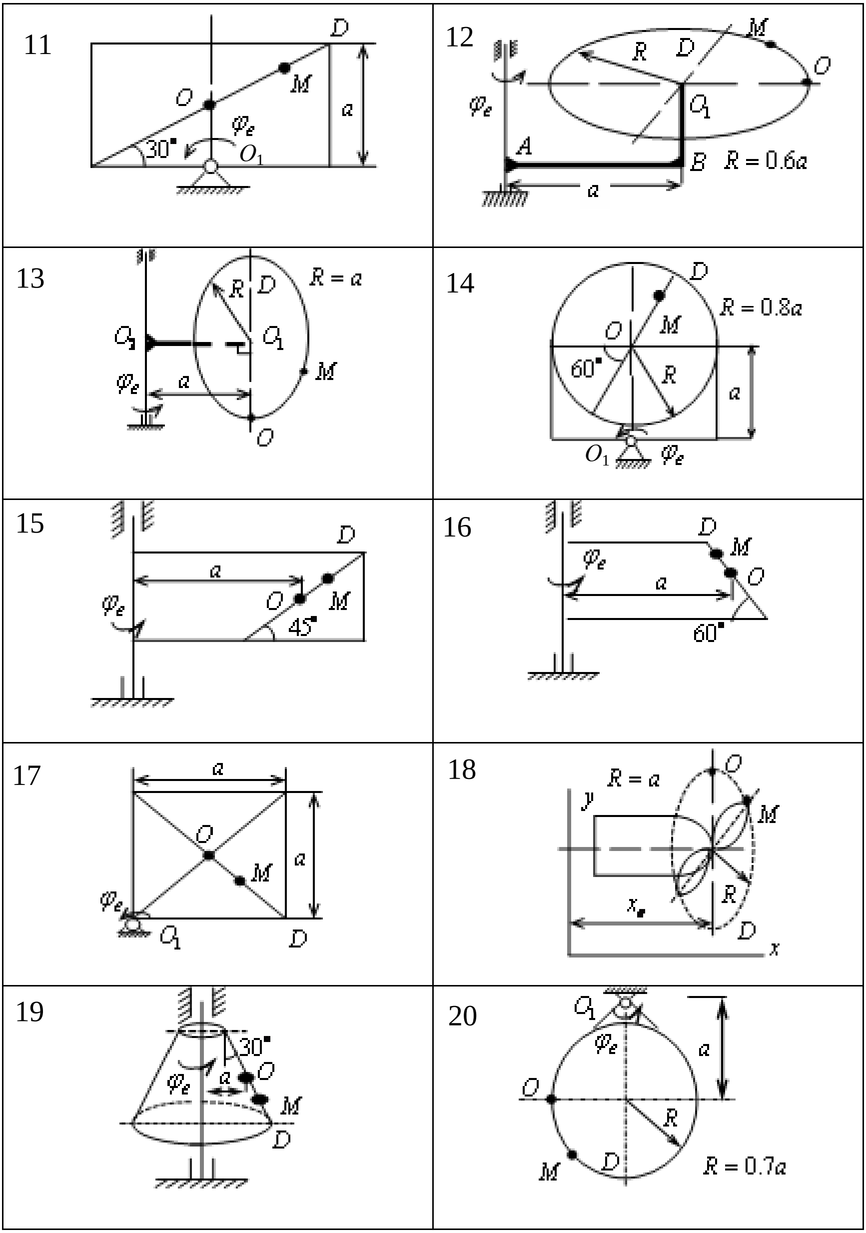
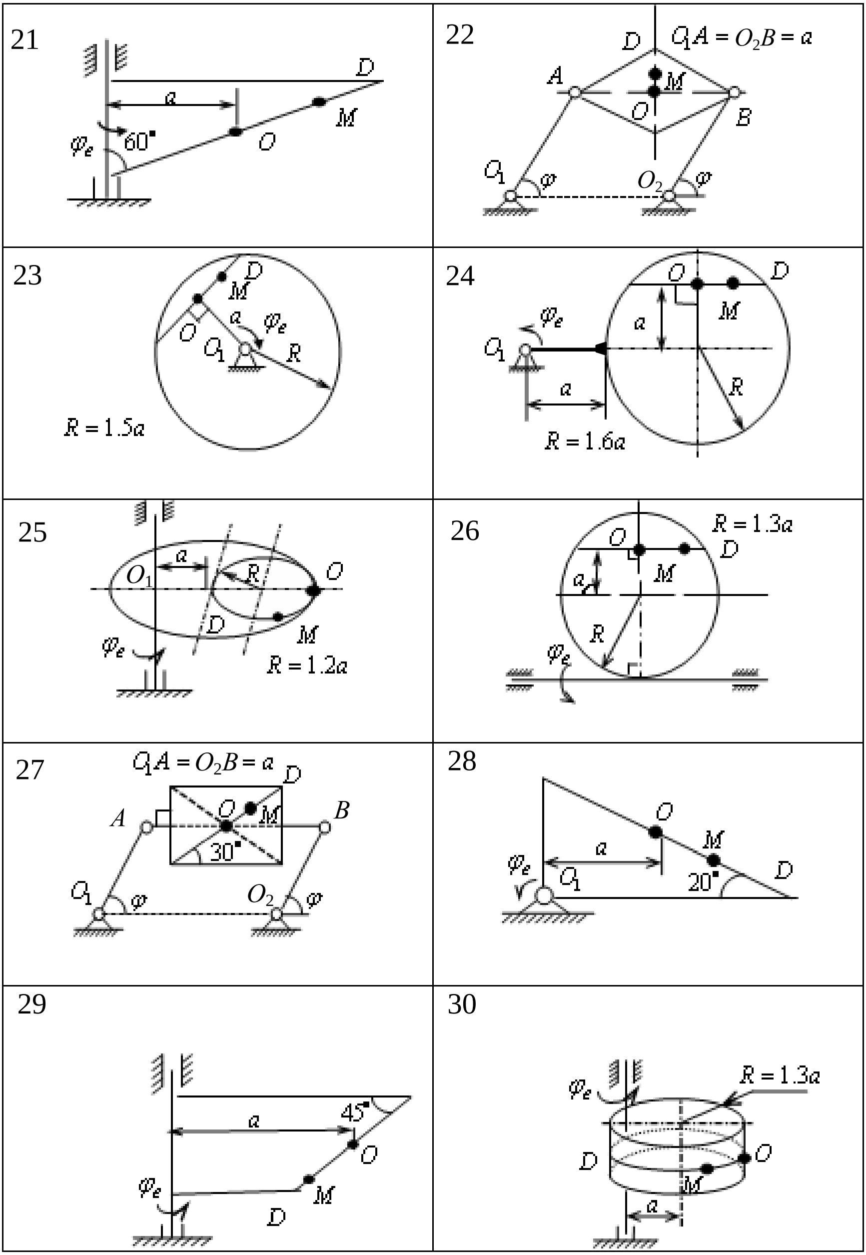

11
D
O
M
φ_e
a
30°
O_1
12
M
R
D
O
φ_e
O_1
A
B
$R = 0.6a$
a
13
R
D
$R = a$
O_1
M
φ_e
a
O
14
D
$R = 0.8a$
O
M
60°
R
a
O_1
φ_e
15
D
a
φ_e
O
M
45°
16
D
M
φ_e
O
a
60°
17
a
O
M
a
φ_e
O_1
D
18
O
$R = a$
y
M
R
x_e
D
x
19
30°
O
φ_e
a
M
D
20
O_1
φ_e
a
O
R
M
D
$R = 0.7a$

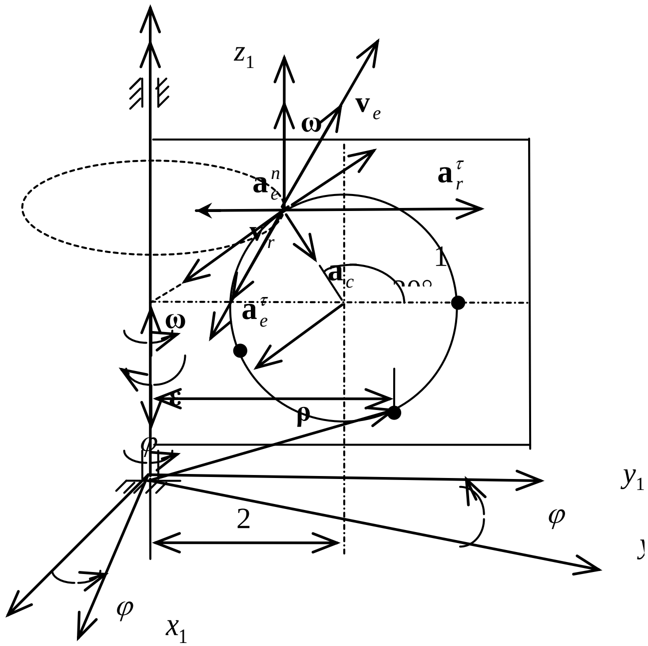
Рис. 7.2



21
D
a
M
O
φ_e
60°
22
$O_1A = O_2B = a$
D
A
M
O
B
O_1
φ
O_2
φ
23
D
M
O
a
φ_e
O_1
R
$R = 1.5a$
24
O
D
φ_e
M
a
O_1
a
R
$R = 1.6a$
25
a
O_1
R
O
D
M
φ_e
$R = 1.2a$
26
$R = 1.3a$
O
D
M
a
R
φ_e
27
$O_1A = O_2B = a$
D
A
O
M
B
30°
O_1
φ
O_2
φ
28
O
M
a
φ_e
O_1
20°
D
29
a
45°
O
φ_e
M
D
30
φ_e
$R = 1.3a$
D
O
M
a

Рис. 7.3

Пример. Прямоугольная пластина вращается вокруг неподвижной оси, проходящей по одной из ее сторон согласно закону $\varphi = 2t^2 - 0.5t^3$ (рис. 7.4). Положительное направление отсчета угла φ указано на рис. 7.4 дуговой стрелкой. По дуге окружности радиуса $R = 0.5\,м$ движется точка B по закону $s = \overset{\smile}{AB} = \dfrac{4}{3}\pi R \cos\left(\dfrac{\pi}{3}t\right)\,м$ (положительное направление отсчета от A к B и D). Определить $\mathbf{v}_A$ и $\mathbf{a}_A$ в момент времени $t_1 = 2\,c$ точки



B.

Рис. 7.4

Решение. Воспользуемся рекомендациями, данными в п. 4.4 для решения задач на сложное движение точки.

1. Свяжем подвижную систему координат $Ox_1y_1z_1$ с пластиной. Тогда движение точки B по окружности радиуса R является относительным, а вращательное движение пластины – переносным.

2. При определении кинематических характеристик относительного движения можно мысленно остановить вращение пластины и рассматривать только движение точки по окружности согласно заданному закону

$$s = \overset{\smile}{AB} = \frac{4}{3}\pi R\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right).$$

В момент времени $t_1 = 2$ *с*

$$s = \overset{\smile}{AB_1} = \frac{4}{3}\pi R\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) = \frac{4}{3}\pi R\cos 120° = \frac{-4}{3}\pi R\cdot 0.5 = -\frac{2}{3}\pi R.$$

Так как $s_1 < 0$, то расстояние $\overset{\smile}{AB_1}$ отсчитывается противоположно направлению ABD, при этом

$$\angle ACB_1 = |\, s_1 \,| / R = 2\pi/3.$$

Положение точки B в данный момент времени изображаем на рис. 7.4 точкой B_1.

Находим алгебраическую относительную скорость, касательное и нормальное ускорения в произвольный момент времени

$$\mathrm{v}_r = \dot{s} = -\frac{4}{9}\pi^2 R\sin(\frac{\pi}{3}t),\; a_r^{\tau} = \ddot{s} = -\frac{4}{27}\pi^3 R\cos(\frac{\pi}{3}t),$$

$$a_r^n = \mathrm{v}_r^2 / \rho_r = \mathrm{v}_r^2 / R,$$

где ρ_r – радиус кривизны окружности, равный ее радиусу.

В момент времени $t_1 = 2$ *с* получим

$$\mathrm{v}_r = -\frac{4}{9}\pi^2 R\sin 120° = -1.9 \text{ м/с},$$

$$a_r^{\tau} = \frac{-4}{27}\pi^3 R\cos 120° = 1.15 \text{ м/с},\; a_r^n = (1.9)^2/0.5 = 7.2 \text{ м/с}^2.$$

Знаки показывают, что вектор $\mathbf{a}_r^{\tau}$ направлен в положительном направлении отсчета расстояния s, а вектор $\mathbf{v}_r$ – в противоположном направлении, по касательной к окружности. Вектор $\mathbf{a}_r^n$

направлен по радиусу окружности к центру C. Изображаем эти векторы на рис. 7.4.

3. При определении кинематических характеристик переносного движения можно мысленно остановить движение точки B по пластине и рассматривать только движение точки B_1 пластины. Тогда точка B_1 движется по окружности радиуса h_1 , отмеченной на рис. 7.4 штрихами.

$$h_1 = 2R - R\sin 30° = 1.5R = 0.75\ м.$$

Угловая скорость и угловое ускорение в произвольный момент времени равны: $\omega = \dot{\varphi} = 4t - 1.5t^2$, $\varepsilon = \dot{\omega} = 4 - 3t$. Тогда для момента времени $t_1 = 2\ c$ получим $\omega = 2\ c^{-1}$, $\varepsilon = -2\ c^{-2}$.

Знаки указывают, что в момент $t_1 = 2\ c$ направление ω совпадает с положительным направлением отсчета угла φ, а направление ε противоположно. Изобразим векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$, а также соответствующие им дуговые стрелки на рис. 7.4.

Определяем $\mathbf{v}_e$ и $\mathbf{a}_e$ в момент времени $t_1 = 2\ c$:

$$\mathrm{v}_e = |\omega| \cdot h_1 = 1.5\ м/с,\ a_e^{\tau} = |\varepsilon|\, h_1 = 1.5\ м/с,\ a_e^n = \omega^2 h_1 = 3\ м/с^2.$$

Изображаем на рис. 7.4 векторы $\mathbf{v}_e$ и $\mathbf{a}_e^{\tau}$. Они направлены в соответствии с направлениями $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$, по касательной к мгновенной переносной траектории – окружности, отмеченной штрихами.

Вектор $\mathbf{a}_e^n$ направлен по радиусу окружности к оси вращения.

4. Модуль ускорения Кориолиса точки определяем из выражения (4.6): $a_c = 2\,|\mathrm{v}_r|\,|\omega|\sin\alpha$, где α – угол между вектором $\mathbf{v}_r$ и вектором $\boldsymbol{\omega}$ (осью вращения). В момент времени $t_1 = 2\ c$ $\alpha = \angle ACB_1 = 120°$ и $a_c = 2 \cdot 1.9 \cdot 2\cos 30° = 6.6\ м/с^2$.

Вектор $\mathbf{a}_c$ (см. рис. 7.4) направлен перпендикулярно векторам $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{v}_r$, т.е. в данном случае перпендикулярно плоскости пластины так, что кратчайший поворот вектора $\boldsymbol{\omega}$ до совмещения с вектором $\mathbf{v}_r$ виден с конца вектора $\mathbf{a}_c$ против хода часовой стрелки.

5. Векторы $\mathbf{v}_A$ и $\mathbf{a}_A$ определяются по формулам (4.2), (4.4)

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r, \quad \mathbf{a}_A = \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_c.$$

Для определения модулей v_A и a_A воспользуемся аналитическим методом, проведя координатные оси $B_1\,xyz$, как показано на рис. 7.4 (можно выбирать любые декартовы оси координат, но нужно стремиться к таким, чтобы как можно больше проекций векторов на эти оси оказывались равными нулю).

Запишем равенство $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r$ в проекциях на эти оси и определим $\mathbf{v}_{Ax}, \mathbf{v}_{Ay}, \mathbf{v}_{Az}$ в момент времени $t_1 = 2$ *с*.

$$\mathrm{v}_{Ax} = -|\mathrm{v}_r|\cos 30° = -1.9\sqrt{3}/2 = -1.64 \text{ м/с},$$

$$\mathrm{v}_{Ay} = |\mathrm{v}_e| = 1.5 \text{ м/с},$$

$$\mathrm{v}_{Az} = -|\mathrm{v}_r|\sin 30° = -1.9 \cdot 0.5 = -0.95 \text{ м/с},$$

$$\mathrm{v}_A = \sqrt{\mathrm{v}_{Ax}^2 + \mathrm{v}_{Ay}^2 + \mathrm{v}_{Az}^2} = \sqrt{1.64^2 + 1.5^2 + 0.95^2} = 2.4 \text{ м/с}.$$

Модуль скорости v_A можно также определить и по теореме косинусов (см. формулу (4.3)).

$$\mathrm{v}_A = \sqrt{\mathrm{v}_e^2 + \mathrm{v}_r^2 + 2|\mathrm{v}_e \cdot \mathrm{v}_r|\cos 90°} = \sqrt{\mathrm{v}_e^2 + \mathrm{v}_r^2} =$$

$$= \sqrt{1.9^2 + 1.5^2} = 2.4 \text{ м/с}.$$

Запишем теперь равенство $\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_e^\tau + \mathbf{a}_e^n + \mathbf{a}_r^\tau + \mathbf{a}_r^n + \mathbf{a}_c$ в проекциях на оси координат (см. рис. 7.4) и определим $a_{Ax}, a_{Ay}, a_{Az}, a_A$ в момент времени $t_1 = 2$ *с*.

$$a_{Ax} = -a_e^n + |a_r^\tau|\cos 30° + a_r^n \cos 60° =$$

$$= -3 + 1.15\sqrt{3}/2 + 7.2 \cdot 0.5 = 1.6 \text{ м/с}^2,$$

$$a_{Ay} = -|a_e^\tau| - |a_c| = -1.5 - 6.6 = -8.1 \text{ м/с}^2,$$

$$a_{Az} = |a_r^\tau|\sin 30° - a_r^n \cos 30° = 1.15/2 - 7.2 \cdot \sqrt{3}/2 = -5.62 \text{ м/с}^2,$$

$$a_A = \sqrt{a_{Ax}^2 + a_{Ay}^2 + a_{Az}^2} = \sqrt{1.6^2 + 8.1^2 + 5.62^2} = 10 \text{ м/с}^2.$$

Учебное издание

Белкин Александр Анатольевич
Вохмянин Иван Тимофеевич
Егоров Вениамин Валерьевич
Краснолуцкий Сергей Леонидович
Леманов Вадим Владимирович
Юдин Владимир Алексеевич

СБОРНИК ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Кинематика

Под редакцией В.А. Юдина и В.В. Леманова

Учебно-методическое пособие

Темплан 2007 г.

Редактор А.В. Тренина

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 54.НС.05.953.П.006252.06.06 от 26.06.2006 г.
Подписано к печати 27.06.2007. Формат 60х84 1/16 д.л.
Гарнитура Таймс. Бумага офсетная. Ризография.
Объём 2 уч.-изд.л.; 4,5 п.л. Тираж 700 экз. Заказ №

Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет (Сибстрин)
630008, Новосибирск, ул. Ленинградская, 113

Отпечатано мастерской оперативной полиграфии
НГАСУ (Сибстрин)